

Materia Oscura nell'Universo

Corso di formazione e aggiornamento per docenti
di scuole secondarie di secondo grado
Fisica delle particelle e materia oscura nell'Universo

Accademia delle Scienze di Torino
23 novembre 2017

Alessandro Bottino
Università di Torino
Accademia delle Scienze di Torino

Il modello comunemente utilizzato per descrivere il nostro Universo (**modello standard cosmologico**) è quello di un **cosmo in espansione** descritto da (vedi Approfondimento 1):

- **equazioni di relatività generale di Einstein**
- **principio cosmologico** di isotropia e omogeneità a grandi scale [scale maggiori di circa 100 Mpc (1 pc = 3.26 anni luce)]; questo principio consente di rappresentare, mediante la **metrica di Lemaitre-Friedmann-Robertson-Walker**, l'evoluzione dell'Universo attraverso il fattore di scala cosmico $R(t)$

Dai due punti precedenti si ricavano le equazioni dinamiche per $R(t)$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 \equiv H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{R^2}$$

equazione di Friedmann (A)

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p)$$

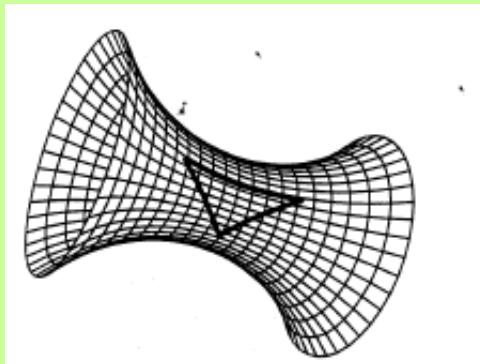
(B)

notazioni

G = costante di Newton
 k = $+1, 0, -1$ parametro di curvatura
 ρ = densità
 p = pressione
 $H \equiv \dot{R}/R$ = costante di Hubble



superficie con **curvatura positiva**



superficie con **curvatura negativa**

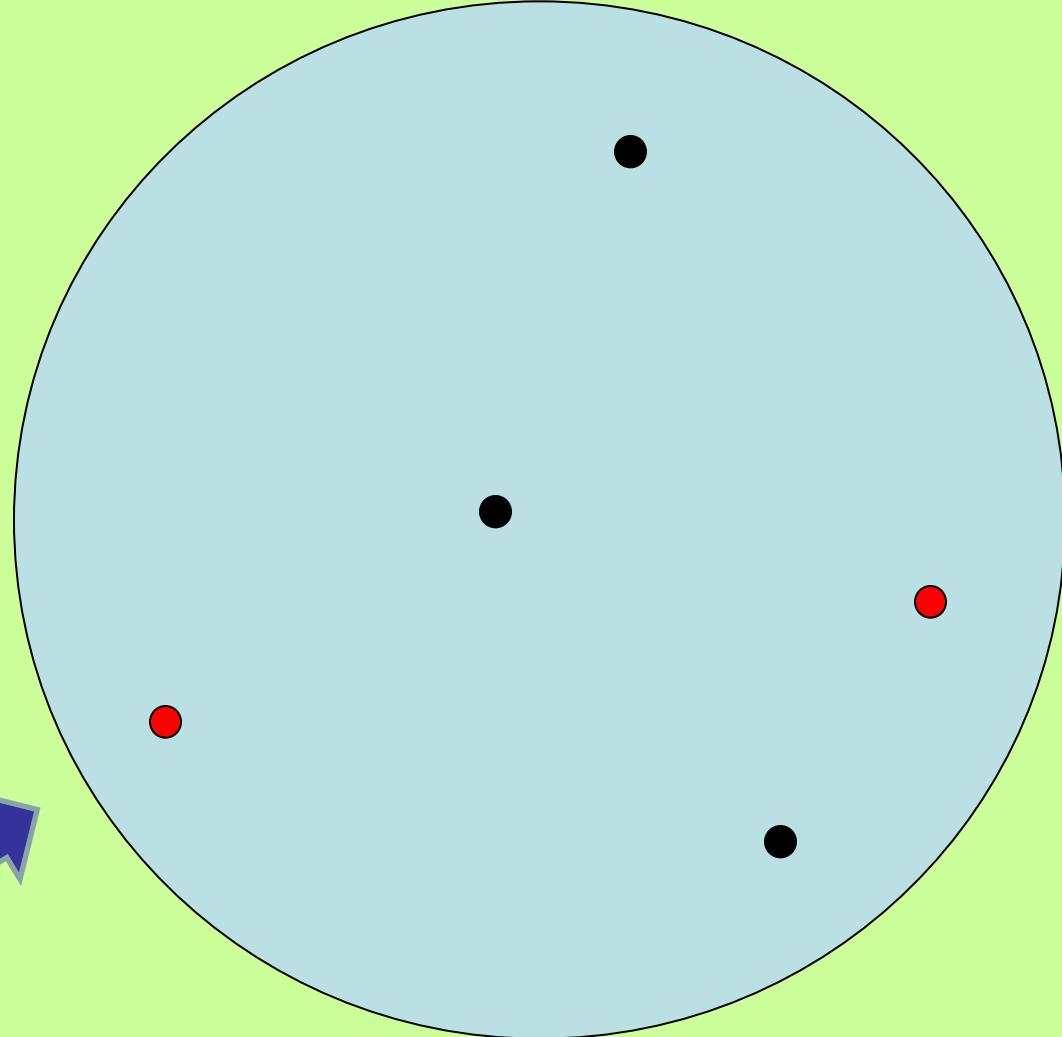
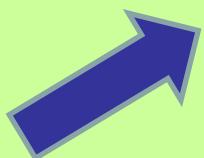
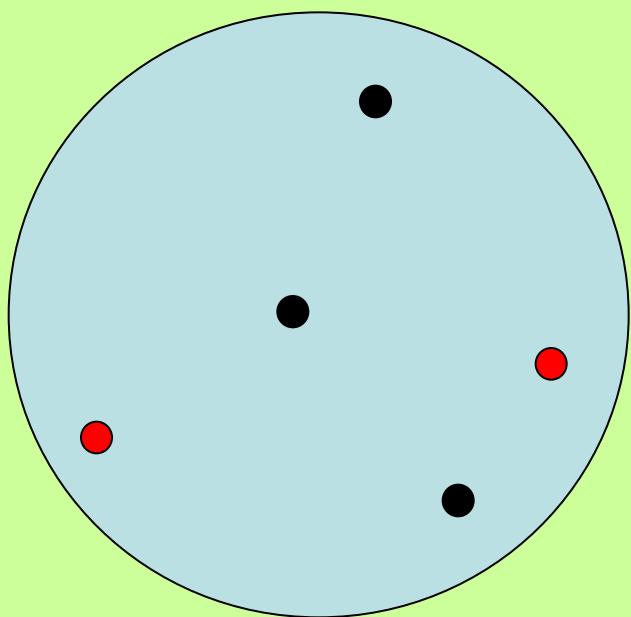
l'Universo si espande:

le distanze relative tra

coppie di particelle

aumentano di uno

stesso fattore

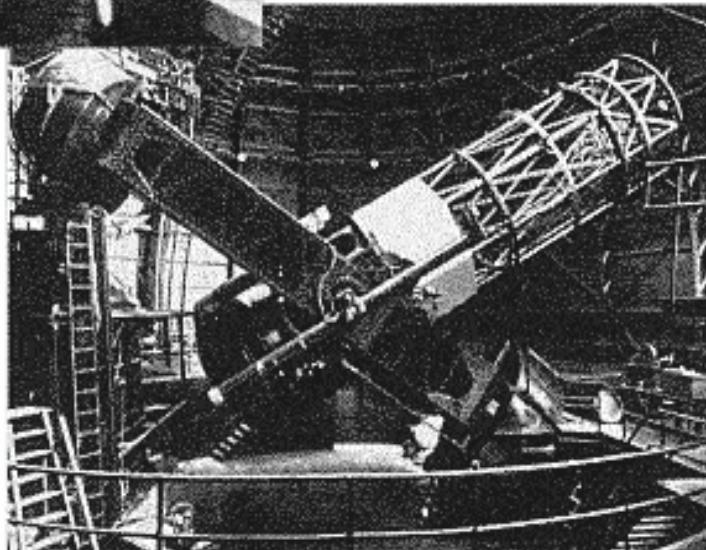


Espansione dell'Universo



Edwin Hubble

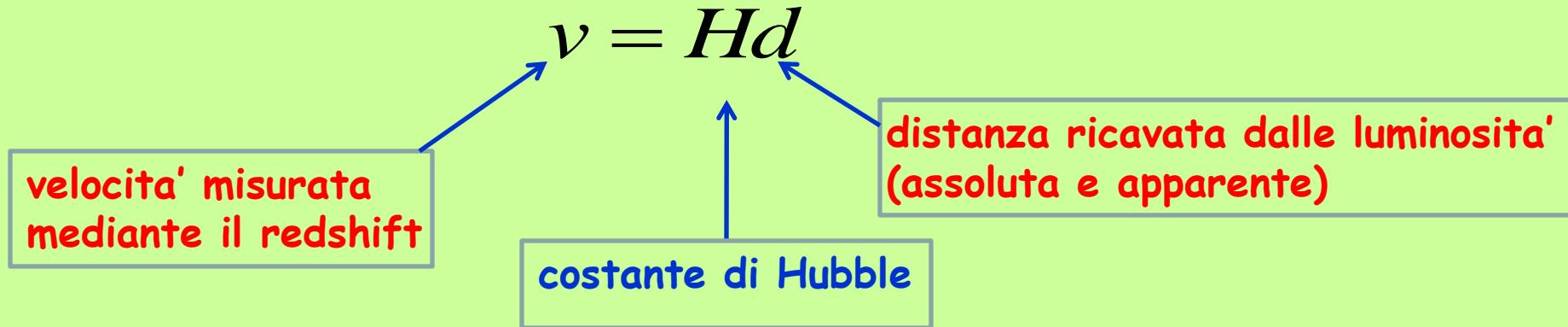
La velocità relativa tra due galassie è proporzionale alla distanza che le separa



Mt. Wilson
100 Inch
Telescope

Evidenza osservativa: l'Universo si espande "recessione delle galassie"

per velocita' piccole rispetto alla velocita' della luce
l'espansione segue la legge di Hubble (1929)



Esempi:

- ★ una galassia che si trova a un milione di parsec da noi recede rispetto a noi con la velocita' di circa 70 km al secondo
- ★ l'ammasso galattico Coma che dista circa 90 milioni di parsec recede con la velocita' di 6.000 km al secondo

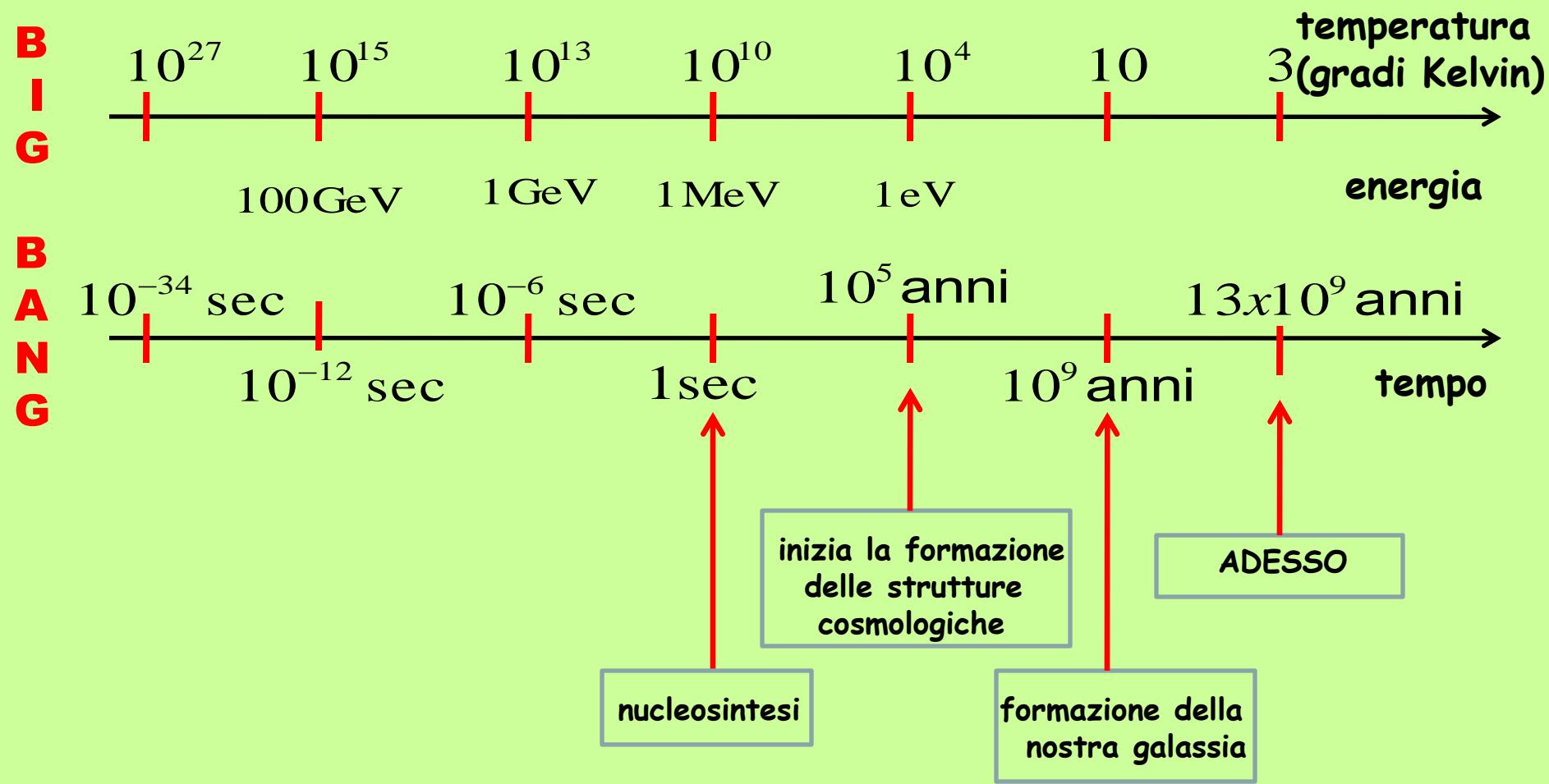
Effetto Doppler cosmologico



se lo spazio **si espande**, la frequenza della radiazione **diminuisce**:
spostamento delle linee spettroscopiche **verso il rosso** (redshift)

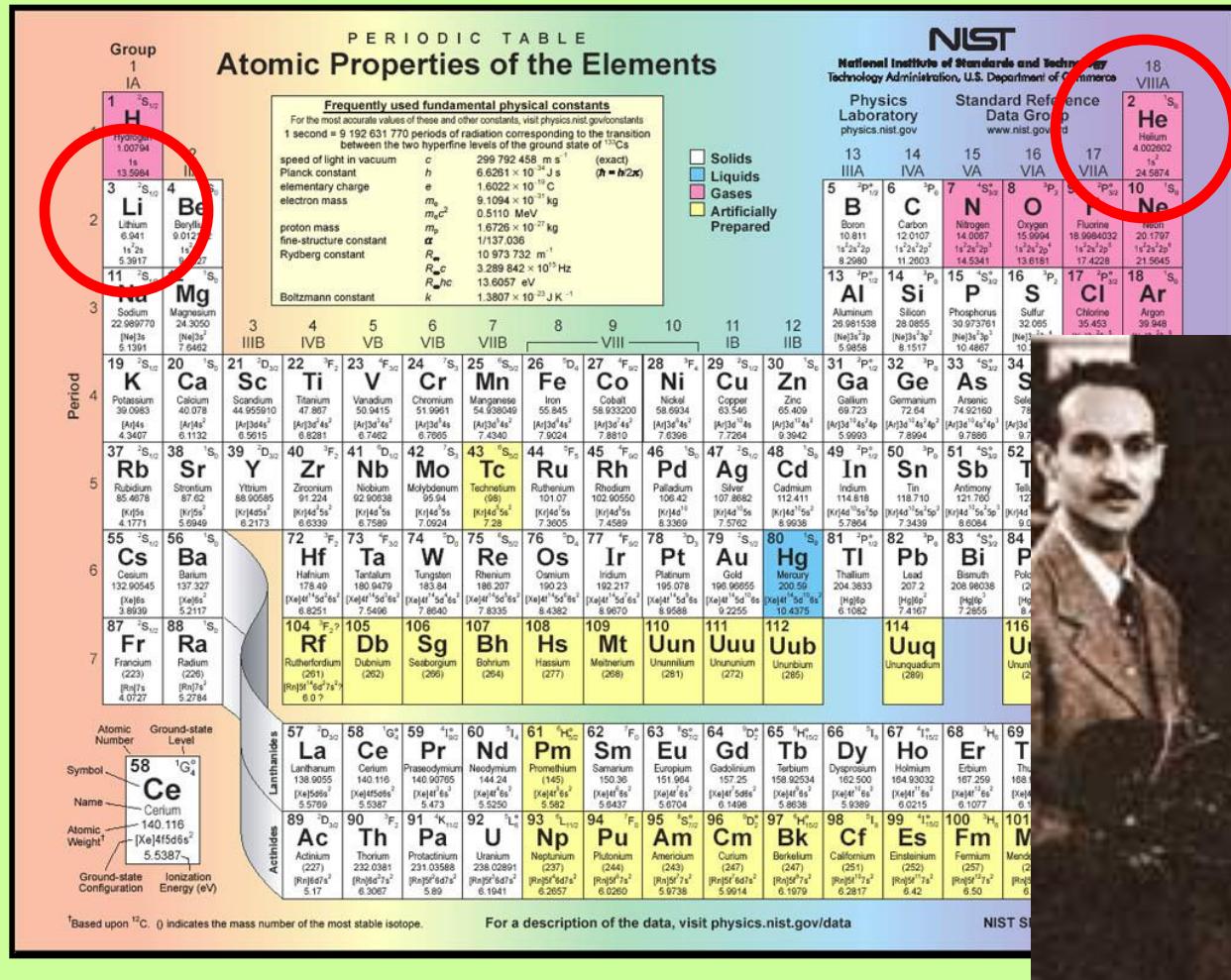


se lo spazio **si contrae**, la frequenza della radiazione **aumenta**:
spostamento delle linee spettroscopiche **verso il blu** (blueshift)



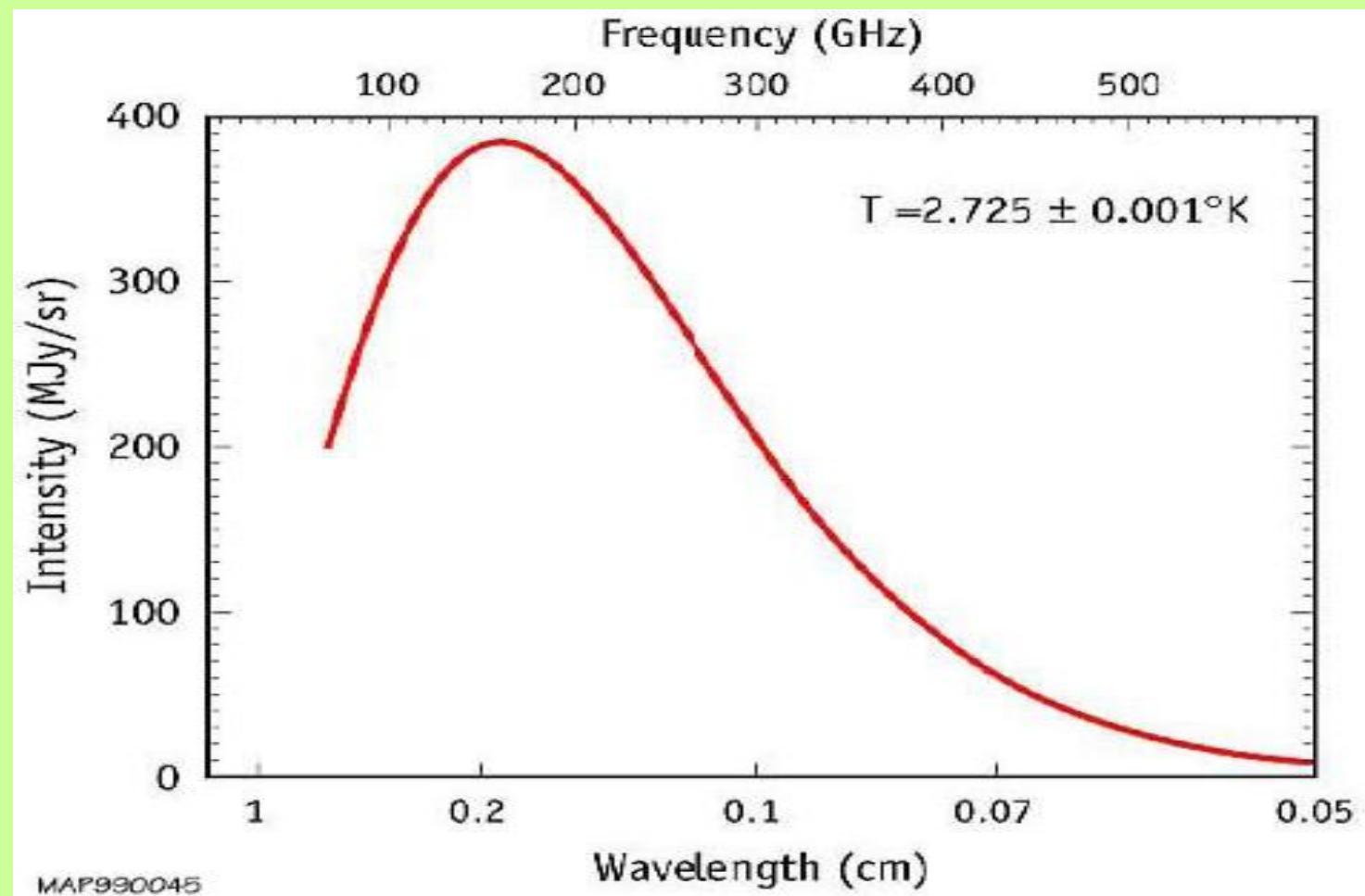
1 GeV \approx energia di riposo del protone $\longleftrightarrow 10^{13}$ gradi Kelvin

nucleosintesi primordiale degli elementi leggeri



Ralph Alpher, George Gamow e Robert Herman (fine '40)

La distribuzione in frequenza del fondo cosmico a microonde (CMB) e' quella di un corpo nero alla temperatura di 2.73 gradi Kelvin



Primi segnali della CMB misurati da Arno Penzias e Robert Wilson (1964)
CMB predetta da Ralph Alpher, George Gamow e Robert Herman (fine '40)

All'evoluzione cosmica contribuiscono 3 componenti:

- **radiazione** (particelle relativistiche) con densità ρ_{rad}
- **materia** (particelle non-relativistiche) con densità ρ_m
- **energia del vuoto** (costante cosmologica) con densità $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$

Per ogni componente la pressione è legata alla densità tramite
l'equazione di stato

$$p = w \rho$$

con

$$\left\{ \begin{array}{ll} w=0 & \text{per la materia} \\ w=1/3 & \text{per la radiazione} \\ w=-1 & \text{per l'energia del vuoto} \end{array} \right.$$

Dal primo principio della termodinamica (conservazione dell'energia)

$$U_f - U_i = -L$$

U = energia del sistema

$-L$ = lavoro compiuto dalle forze esterne

otteniamo

$$d(\rho R^3) = -p d(R^3)$$

variazione di energia in un
elemento di volume comovente

pressione x variazione di volume

$$R^3 d\rho = -(\rho + p) d(R^3)$$



$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1+w) \frac{dR}{R}$$

con soluzione

$$\rho = \text{cost} R^{-3(1+w)}$$

Quindi si ottiene

$$\rho_m \propto \frac{1}{R^3}$$

materia

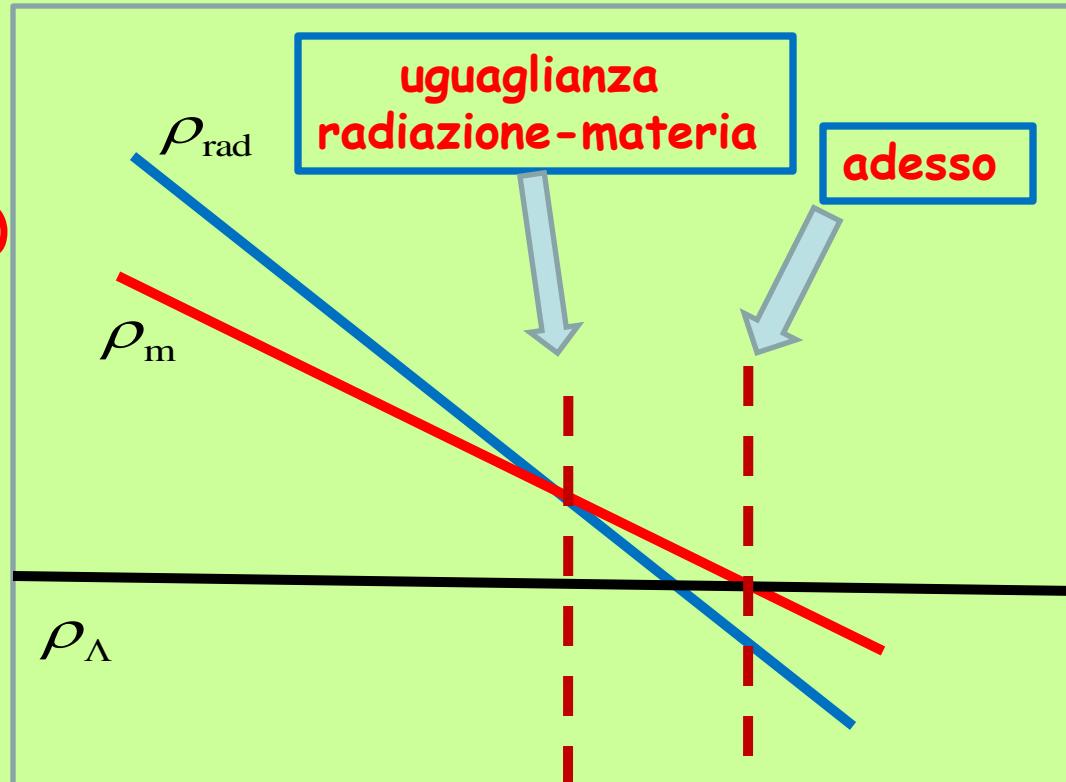
$$\rho_{rad} \propto \frac{1}{R^4}$$

radiazione

$$\rho_\Lambda \propto \text{costante}$$

energia del vuoto

densità di
massa/energia
(scala arbitraria)



0.6 eV

$2.7 \times 10^{-4} \text{ eV}$
(2.73K)

temperatura (eV)
(scala arbitraria)

Unità naturali

Stiamo utilizzando unità naturali, definite da

$$h/(2\pi) = c = k_B = 1$$

in queste unità si ha

$$[l] = [t] = [E^{-1}] = [p^{-1}] = [m^{-1}] = [T^{-1}]$$

fattori di conversione utili

$$1 \text{ GeV} \cong 10^{13} \text{ K}$$

$$1 \text{ MeV} \cong \frac{1}{200 \text{ fm}}$$

Tenuto conto delle varie componenti della densità ρ , l'equazione di Friedmann (A) e l'equazione (B) possono essere riscritte come

$$\boxed{H^2 \equiv \frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{R^2} \quad (\sum_i \rho_i \equiv \rho_m + \rho_{rad} + \rho_\Lambda) \quad (C)}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3p_i)$$

se definiamo una **densità critica** $\rho_{crit} \equiv \frac{3}{8\pi G} H^2$ e $\Omega_i \equiv (\frac{\rho_i}{\rho_{crit}})_0$

dalla (C), dividendo per H^2 , si ha (il suffisso 0 significa al tempo attuale)

$$\Omega_m + \Omega_{rad} + \Omega_\Lambda - \frac{k}{H_0^2 R_0^2} = 1 \quad \longrightarrow \quad \Omega - 1 = \frac{k}{H_0^2 R_0^2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k = +1 \Rightarrow \Omega > 1 \text{ Universo chiuso} \\ k = 0 \Rightarrow \Omega = 1 \text{ Universo piatto} \\ k = -1 \Rightarrow \Omega < 1 \text{ Universo aperto} \end{array} \right.$$

Sia le condizioni iniziali che i dati osservativi attuali indicano un valore **$k = 0$** (problema della piattezza). Prendendo $k = 0$ abbiamo

$$\boxed{\Omega_m + \Omega_{rad} + \Omega_\Lambda = 1}$$

DATI OSSERVATIVI

Costante di Hubble

Da Hubble Space Telescope: $H_0 = 72.0 \pm 3.0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

Da Planck Collaboration (CMB): $H_0 = 67.8 \pm 0.9 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

media approssimata: $H_0 \cong 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ossia

$$h \equiv H_0 / (100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}) \cong 0.7; \quad h^2 \cong \frac{1}{2}$$

Densità frazionarie di energia/materia
(da varie osservazioni, prevalentemente CMB)

$$\Omega_\gamma < 10^{-4}$$

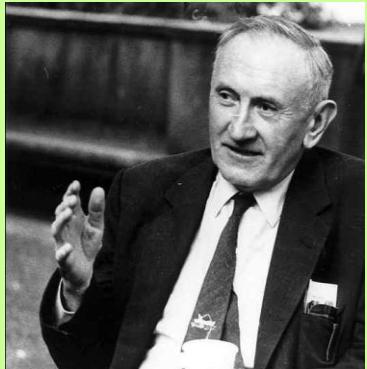
$$\Omega_\nu \leq 1.3 \times 10^{-3}$$

$$\Omega_b \cong 0.05$$

$$\Omega_m \cong 0.31$$

$$\Omega_\Lambda \cong 0.69$$

La materia barionica rappresenta solo un sesto della materia
presente nell'Universo: un enigma che ha una lunga storia

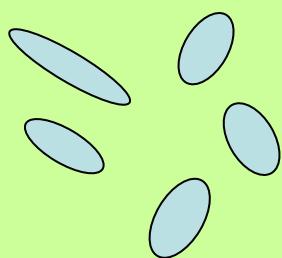


Fritz Zwicky, 1933



La massa visibile
è **insufficiente** a
spiegare le velocità
osservate

Ammasso galattico COMA



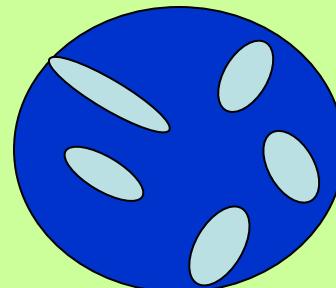
distribuzione di
velocita' delle galassie



massa totale dell'ammasso -
massa visibile

massa mancante

deve esistere della massa associata
alla materia oscura

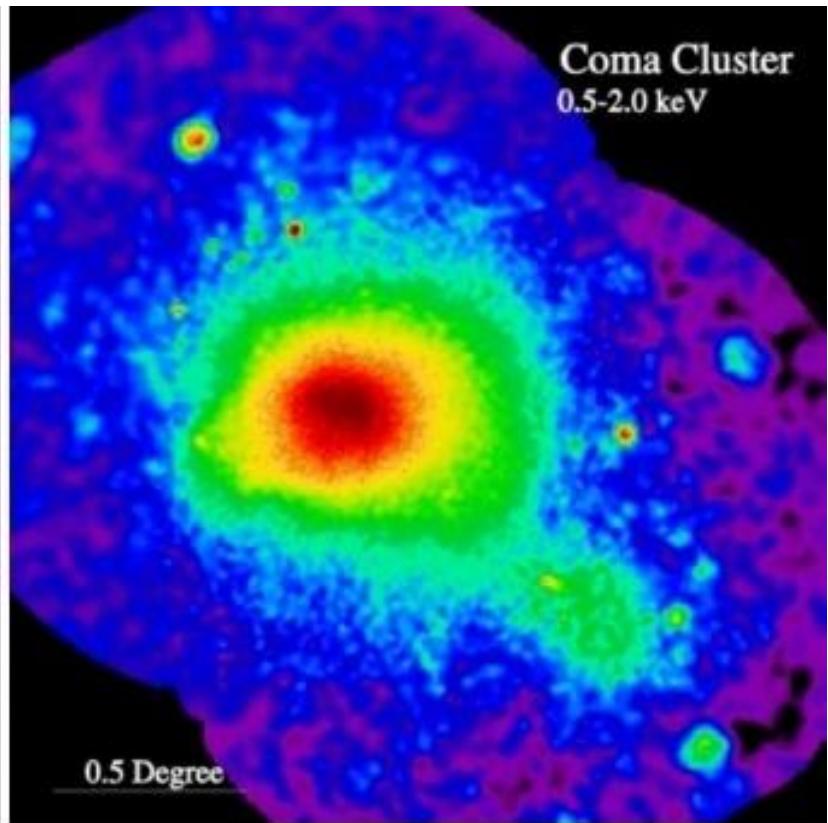


Ammasso Coma

immagine nell'ottico

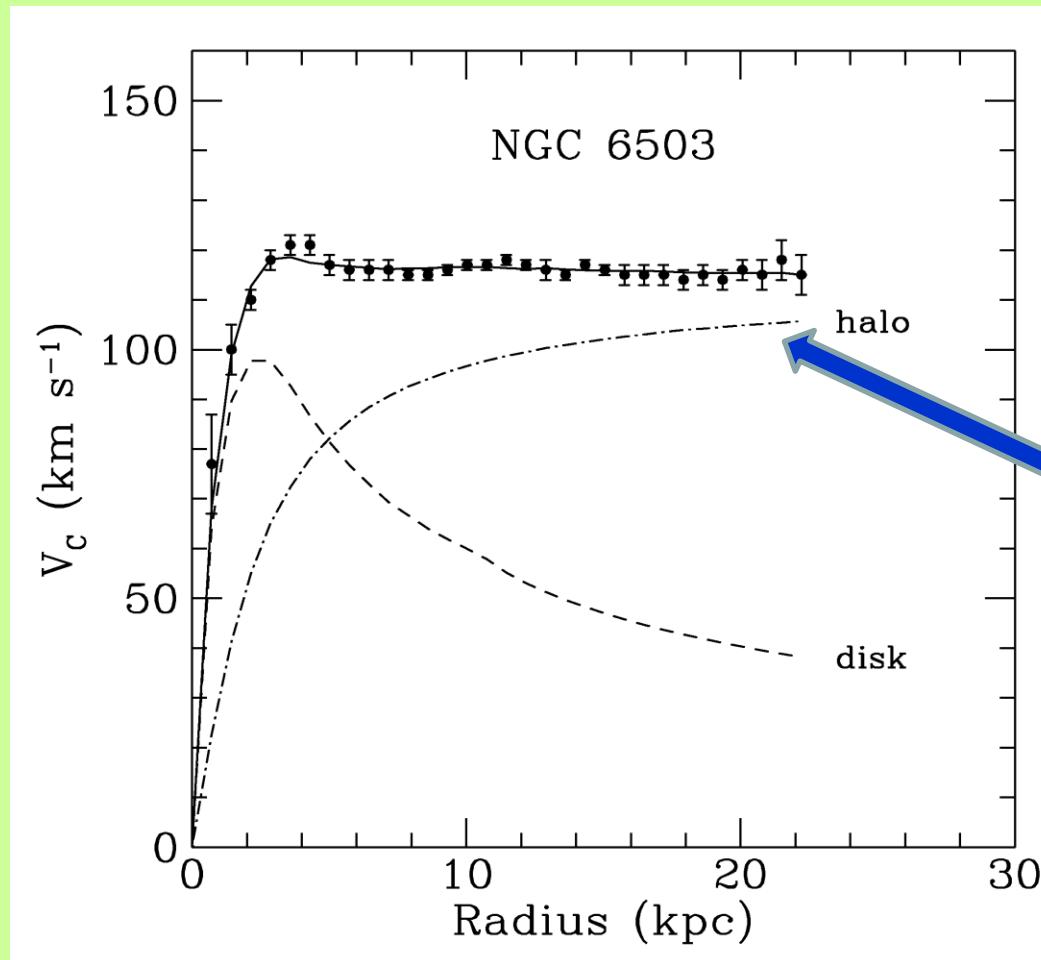


immagine a raggi-X
satellite ROSAT



senza la presenza della materia, il gas caldo evaporerebbe

Curve rotazionali delle galassie

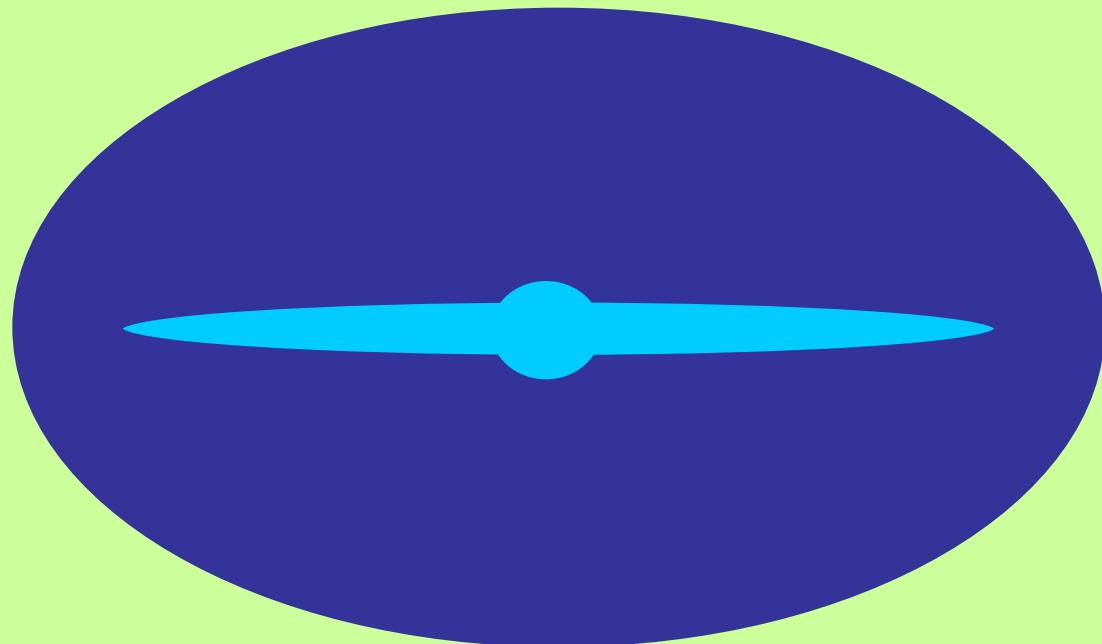


Vera Rubin

alone di
materia oscura

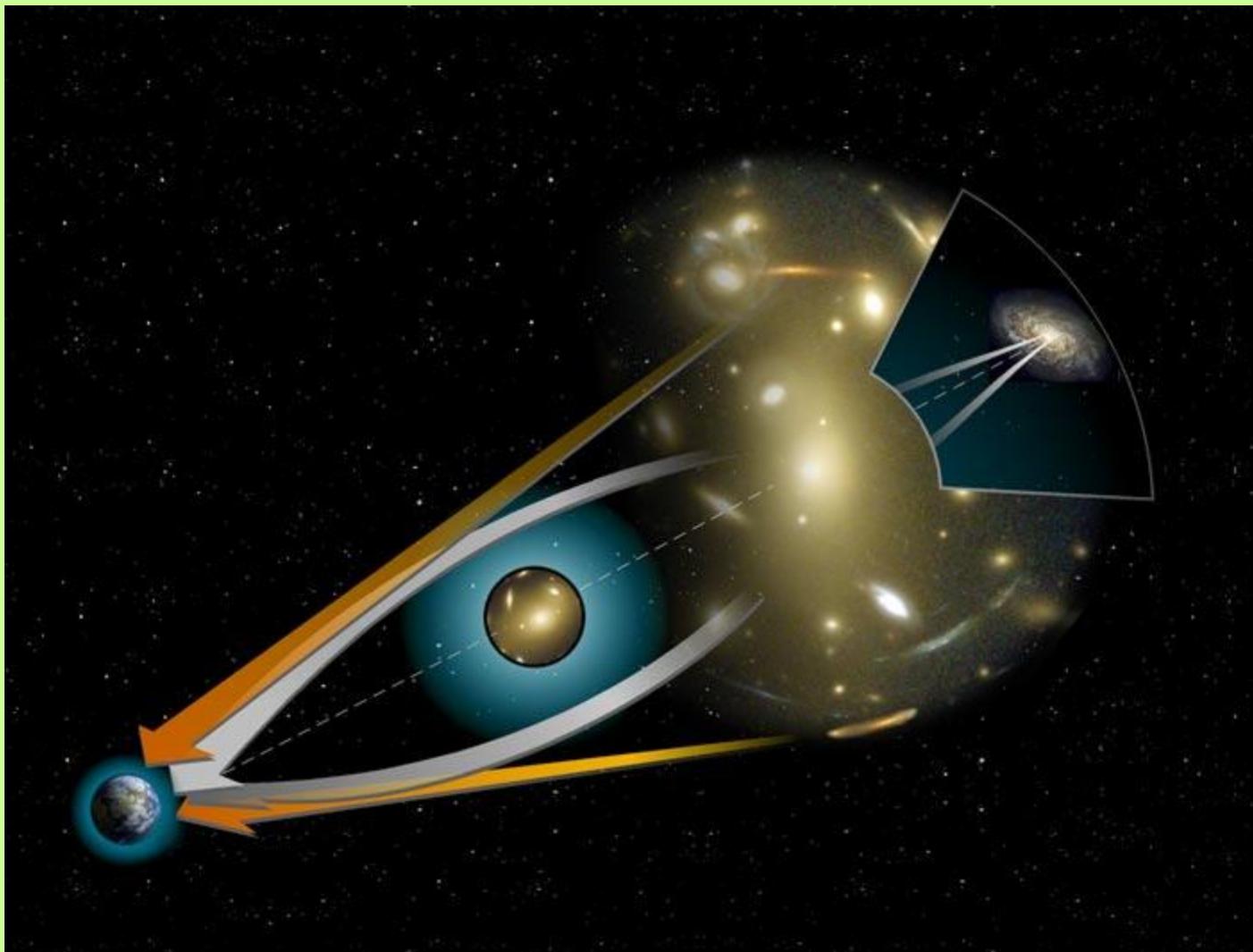
Curva rotazionale della Galassia NGC 6503

Alone di materia oscura

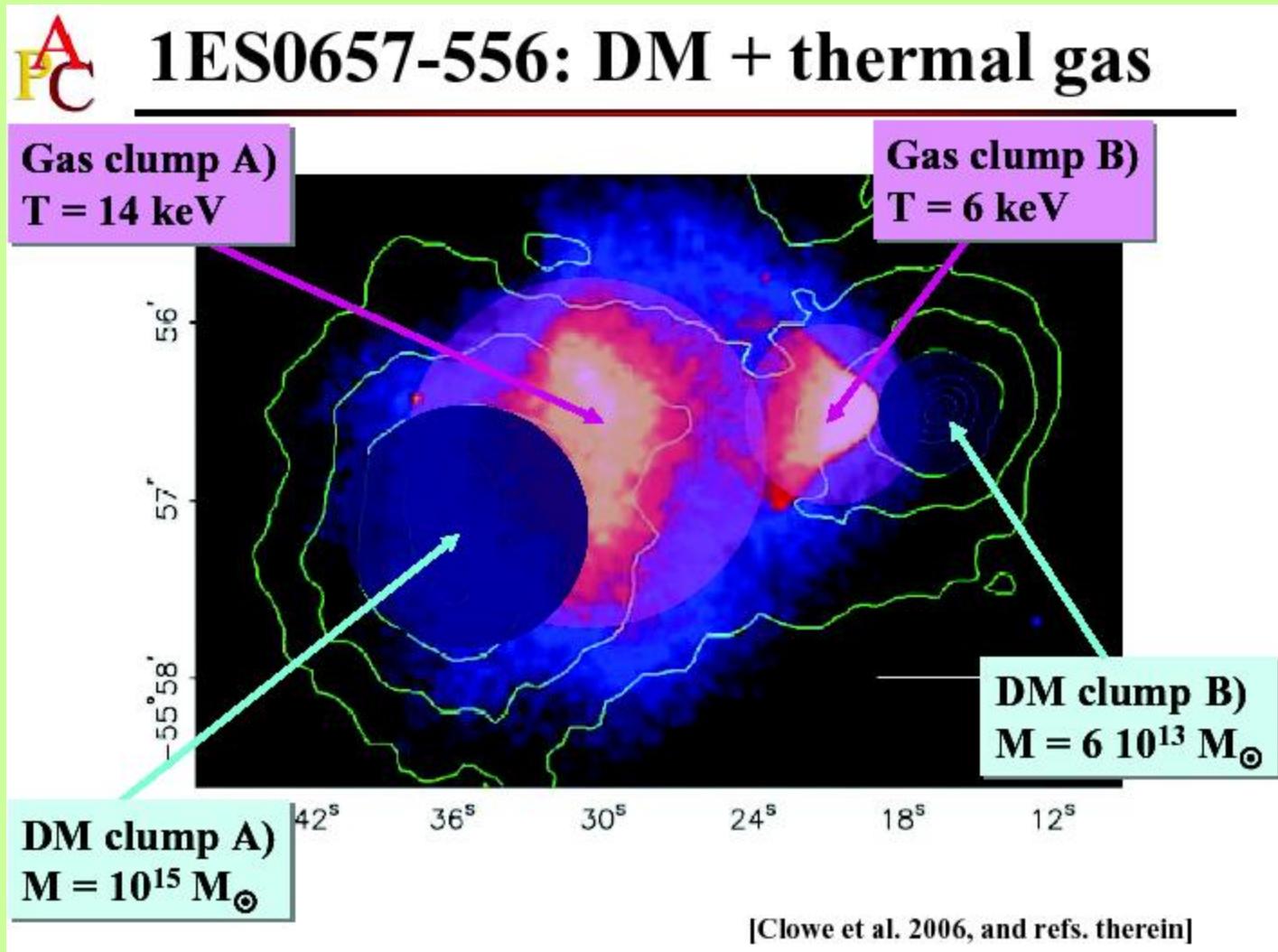


la nostra galassia vista di taglio

Lente gravitazionale



Urto di due ammassi galattici avvenuto circa 100 milioni di anni fa. Bullet cluster



distanza tra i due centri di circa 720.000 parsec
velocita' relativa 4.700 km al secondo

Termodinamica dell'Universo primordiale

Consideriamo un **gas di particelle debolmente interagenti con gradi di libertà interni g** (segno + per distribuzione di Fermi-Dirac, segno - per distribuzione di Bose-Einstein)

densità in numero $n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{1}{e^{E/T} \pm 1}$

densità in energia $\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{E}{e^{E/T} \pm 1}$

pressione $p = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{p^2 / 3E}{e^{E/T} \pm 1}$

(in teoria cinetica: $p = \frac{1}{3} n \langle p v \rangle = \frac{1}{3} \langle \frac{p^2}{E} \rangle n$)

Per particelle **non-relativistiche** ($m/T \gg 1$)

$$n \cong g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m/T}$$

$$\begin{aligned} \rho &\cong m n \\ p &\cong T n \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad p \ll \rho$$

Per particelle **relativistiche** ($m/T \ll 1$)

$$\begin{cases} n \cong \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{Bose-Einstein} \\ n \cong \frac{3}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & \text{Fermi-Dirac} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho \cong \frac{\pi^2}{30} g T^4 & \text{Bose-Einstein} \\ \rho \cong \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & \text{Fermi-Dirac} \end{cases}$$

$$p \cong \frac{1}{3} \rho$$

$\zeta(x)$ funzione ζ
di Riemann
 $\zeta(3) = 1.20$

Nel caso di più specie di particelle presenti nel plasma i contributi delle **particelle relativistiche** prevalgono su quelli delle particelle non-relativistiche. Per esempio, la densità di energia totale è data da

$$\begin{aligned}\rho &\cong \frac{\pi^2}{30} \left[\sum_{\substack{i=\text{bosoni} \\ \text{relativ}}} g_i T_i^4 + \frac{7}{8} \sum_{\substack{i=\text{fermioni} \\ \text{relativ}}} g_i T_i^4 \right] \\ &\cong \frac{\pi^2}{30} \left[\sum_{\substack{i=\text{bosoni} \\ \text{relativ}}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\substack{i=\text{fermioni} \\ \text{relativ}}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 \right] T^4\end{aligned}$$

ossia

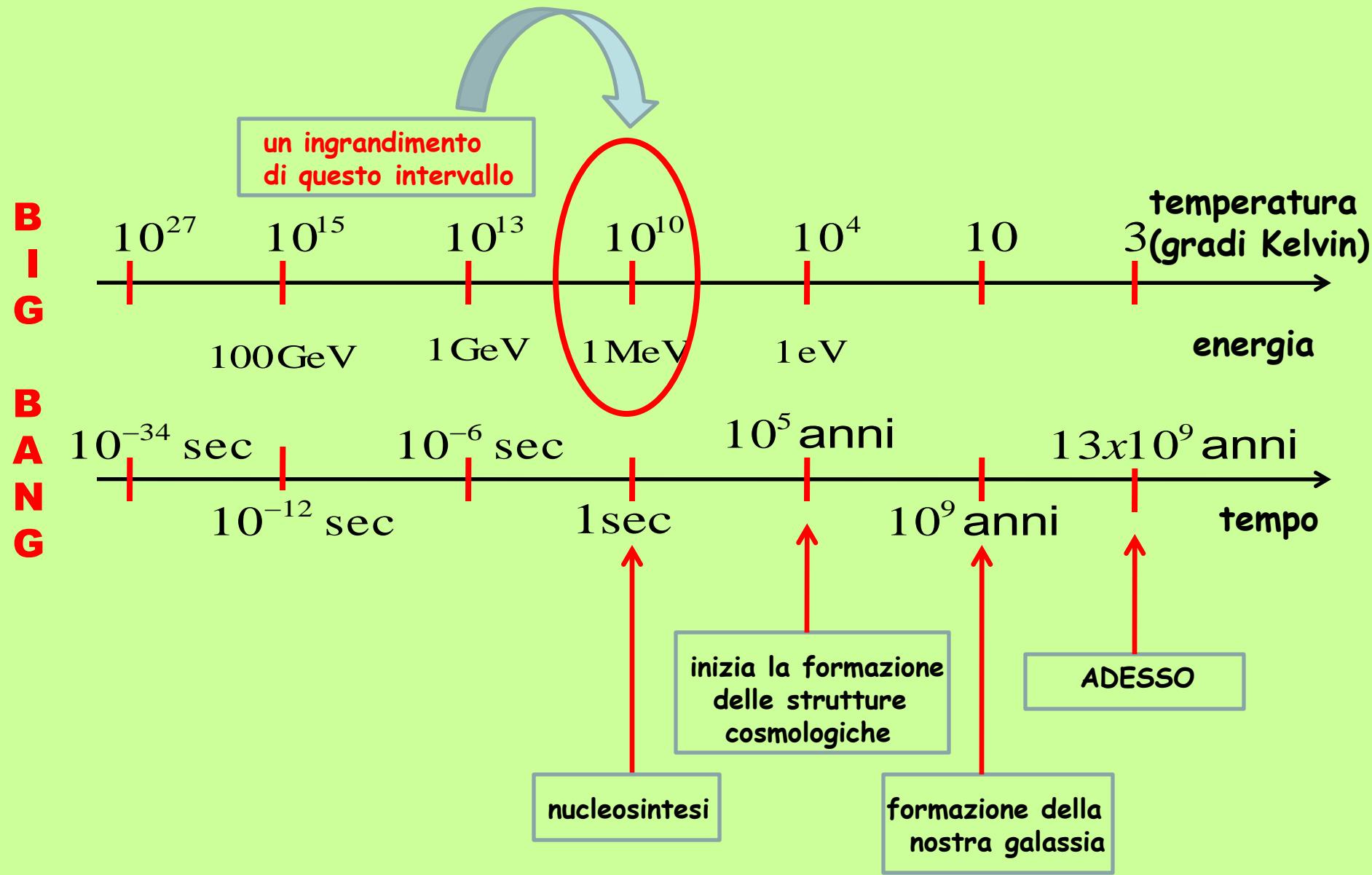
$$\boxed{\rho \cong \rho_{rad} = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4}$$

dove

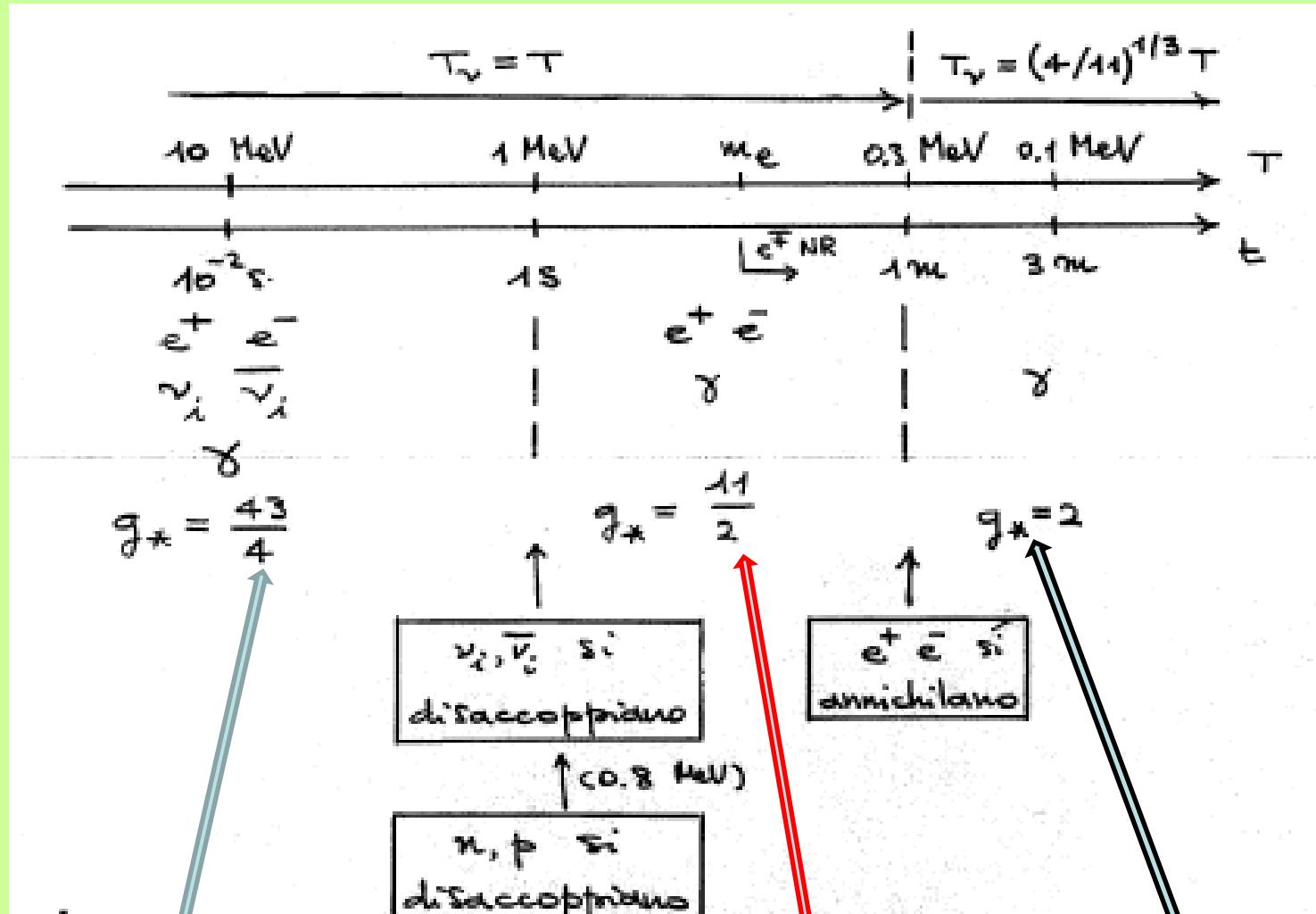
$$g_*(T) \equiv \sum_{\substack{i=\text{bosoni} \\ \text{relativ}}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\substack{i=\text{fermioni} \\ \text{relativ}}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4$$

le sommatorie si estendono a tutte le specie di particelle con massa $m_i \ll T$
 T = temperatura dei fotoni

$$\boxed{p \cong p_{rad} = \frac{1}{3} \rho_{rad} = \frac{\pi^2}{90} g_*(T) T^4}$$



$1\text{ GeV} \approx \text{energia di riposo del protone} \quad \longleftrightarrow \quad 10^{13} \text{ gradi Kelvin}$



$$g_* = g_{*S} = 2 + \frac{7}{8} \times (3 \times 2 + 2 \times 2) = \frac{43}{4}$$

γ $\nu_i, \bar{\nu}_i$ e^+, e^-

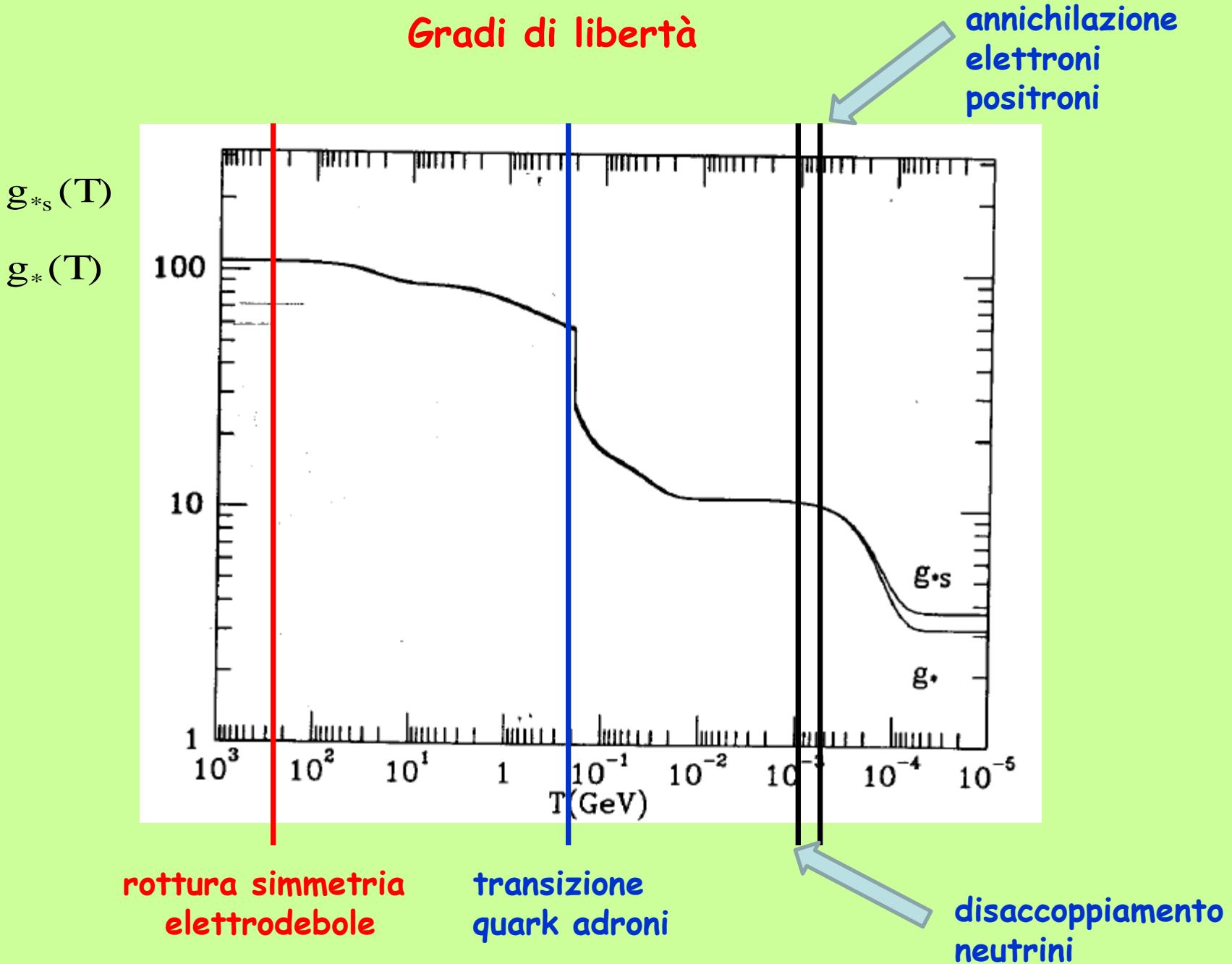
$$g_* = g_{*S} = 2 + \frac{7}{8} \times (2 \times 2) = \frac{11}{2}$$

γ e^+, e^-

$$g_* = g_{*S} = 2$$

γ

Gradi di libertà



Entropia (vedi Approfondimento 2)

Si dimostra che l'entropia nel volume comovente $V = R^3$ è data da

$$S = \frac{\rho + p}{T} R^3$$

Questa si conserva per trasformazione adiabatica (ossia reversibile e senza scambio di calore); quindi

$$\frac{\rho + p}{T} R^3 = \text{cost}$$

La densità di entropia può essere espressa come

$$s = \sum_i \frac{1}{T_i} (p_i + \rho_i) \cong \frac{2\pi^2}{45} g_{*s}(T) T^3$$

$$g_{*s}(T) \equiv \sum_{\substack{i=\text{bosoni} \\ \text{relativ}}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{\substack{i=\text{fermioni} \\ \text{relativ}}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3$$

Conservazione dell'entropia

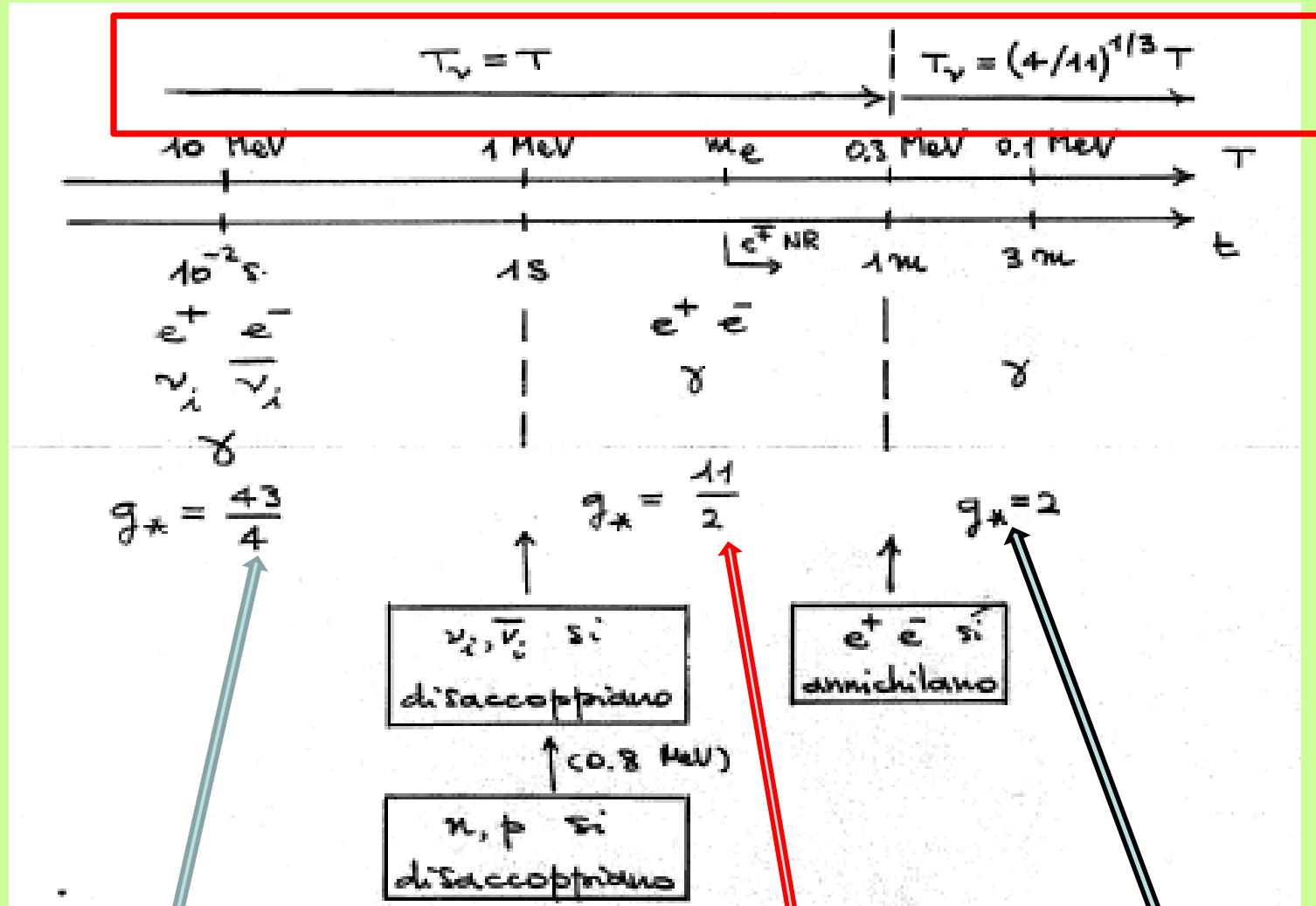
$$g_{*s}(T) T^3 R^3 = \text{cost}$$

dalla conservazione dell'entropia

$$\frac{T}{T_\nu} = \left(\frac{g_{*s}(T_\nu)}{g_{*s}(T)} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{11}{4} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.4$$

dalla temperatura della radiazione del fondo a microonde $T_0 = 2.73\text{ K}$
si deduce che il fondo fossile dei neutrini deve avere la temperatura

$$T_\nu = 1.95\text{ K}$$



$$g_* = g_{*s} = 2 + \frac{7}{8} \times (3 \times 2 + 2 \times 2) = \frac{43}{4}$$

$\chi \quad \nu_i, \bar{\nu}_i \quad e^+, e^-$

$$g_* = g_{*s} = 2 + \frac{7}{8} \times (2 \times 2) = \frac{11}{2}$$

$\chi \quad e^+, e^-$

$$g_* = g_{*s} = 2$$

γ

**Come si e' generata la materia
oscura ?**

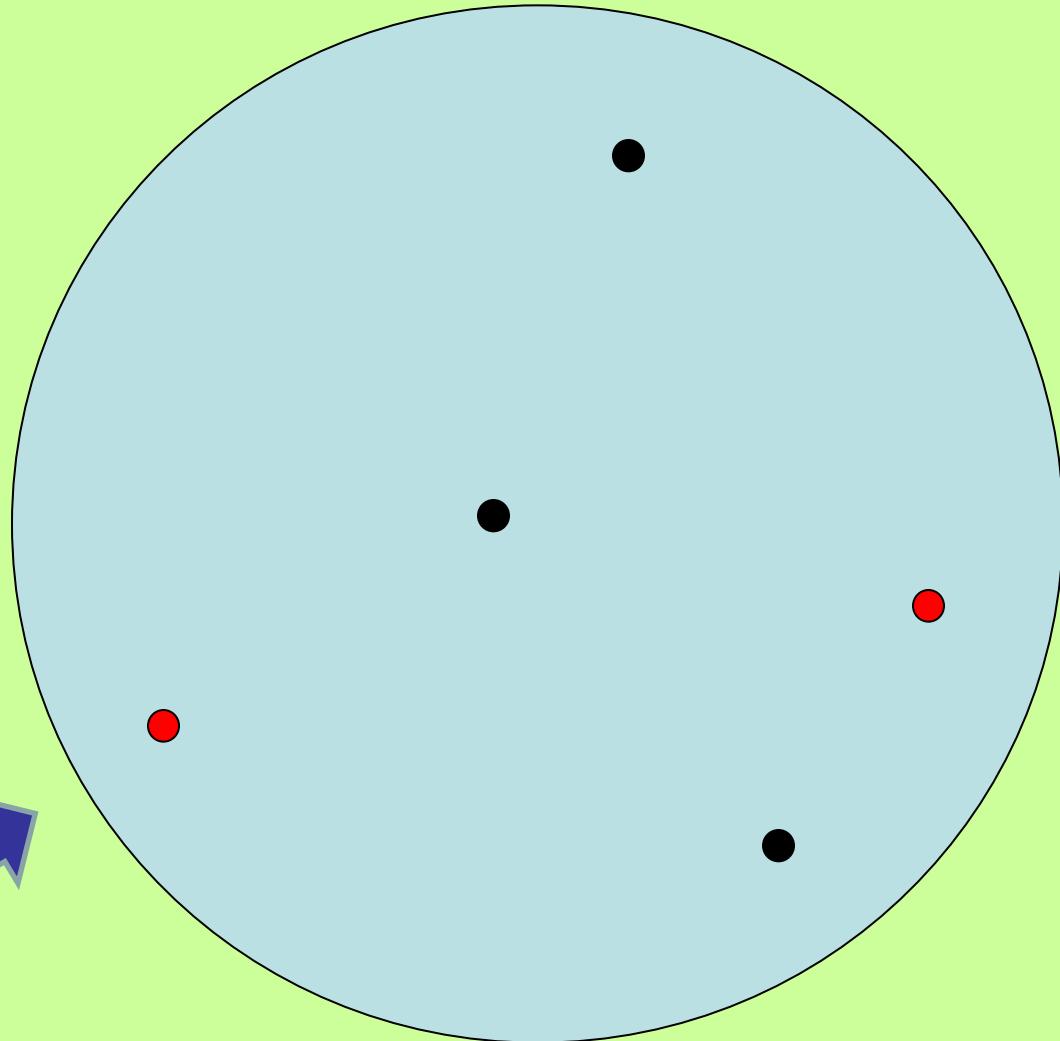
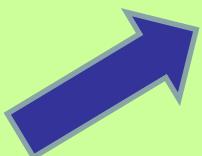
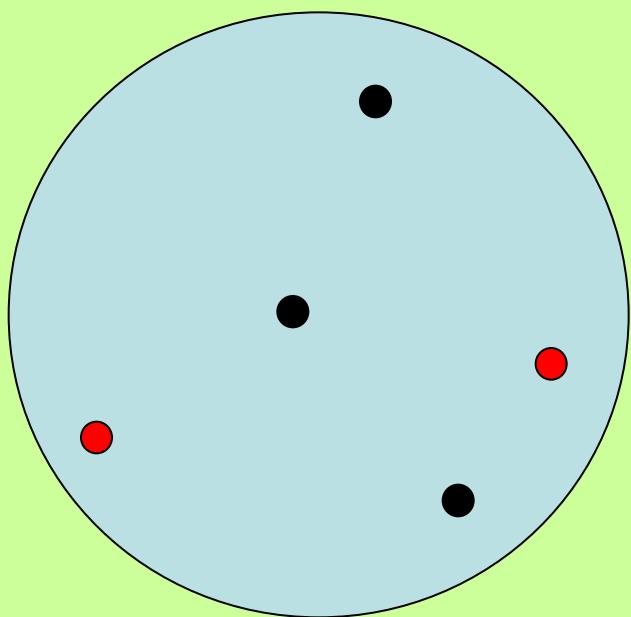
l'Universo si espande:

le distanze relative tra

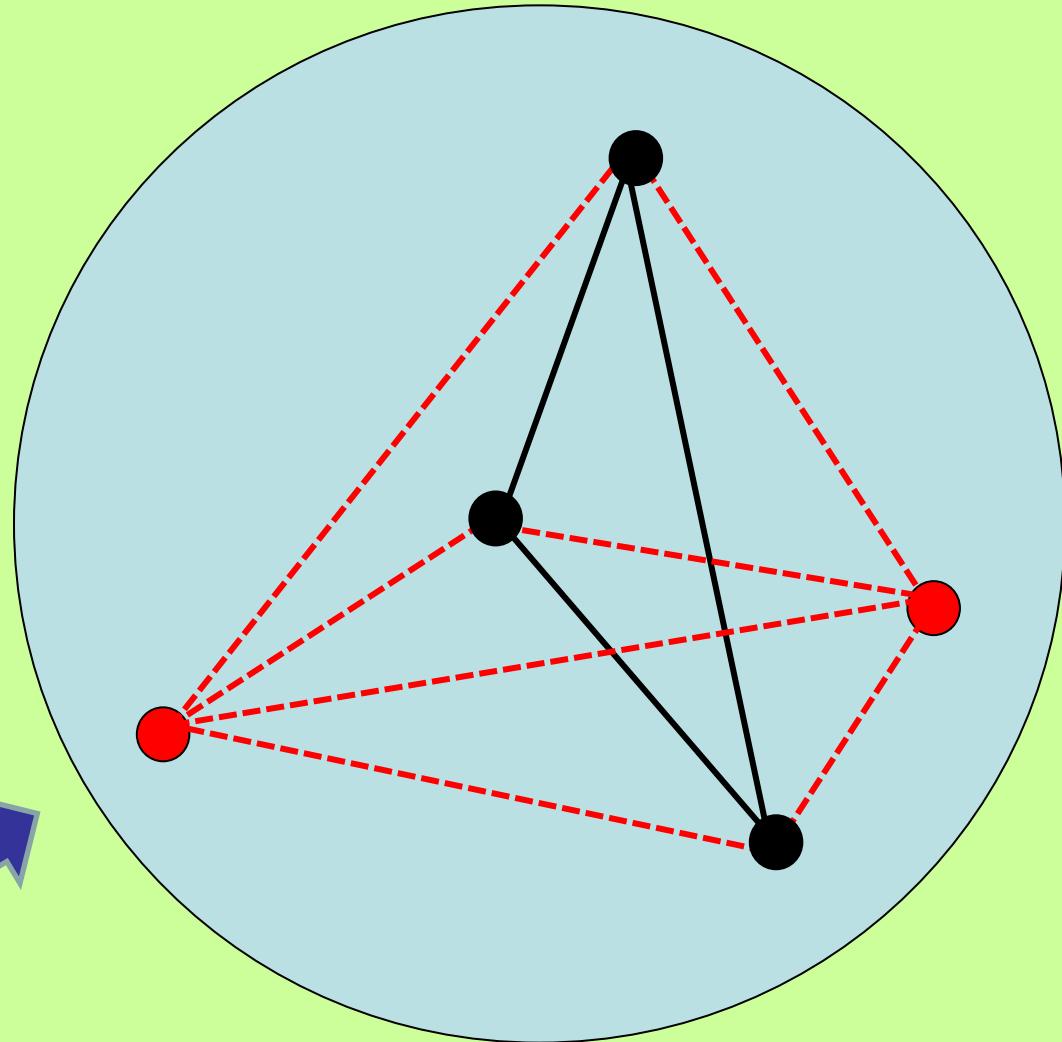
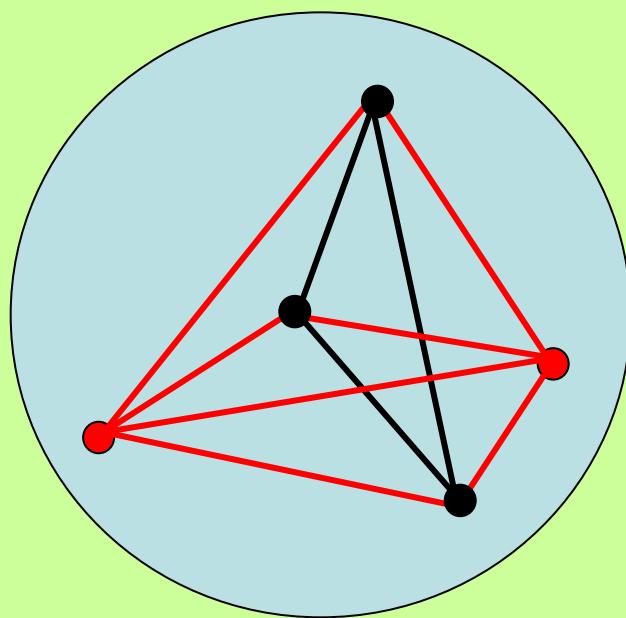
coppie di particelle

aumentano di uno

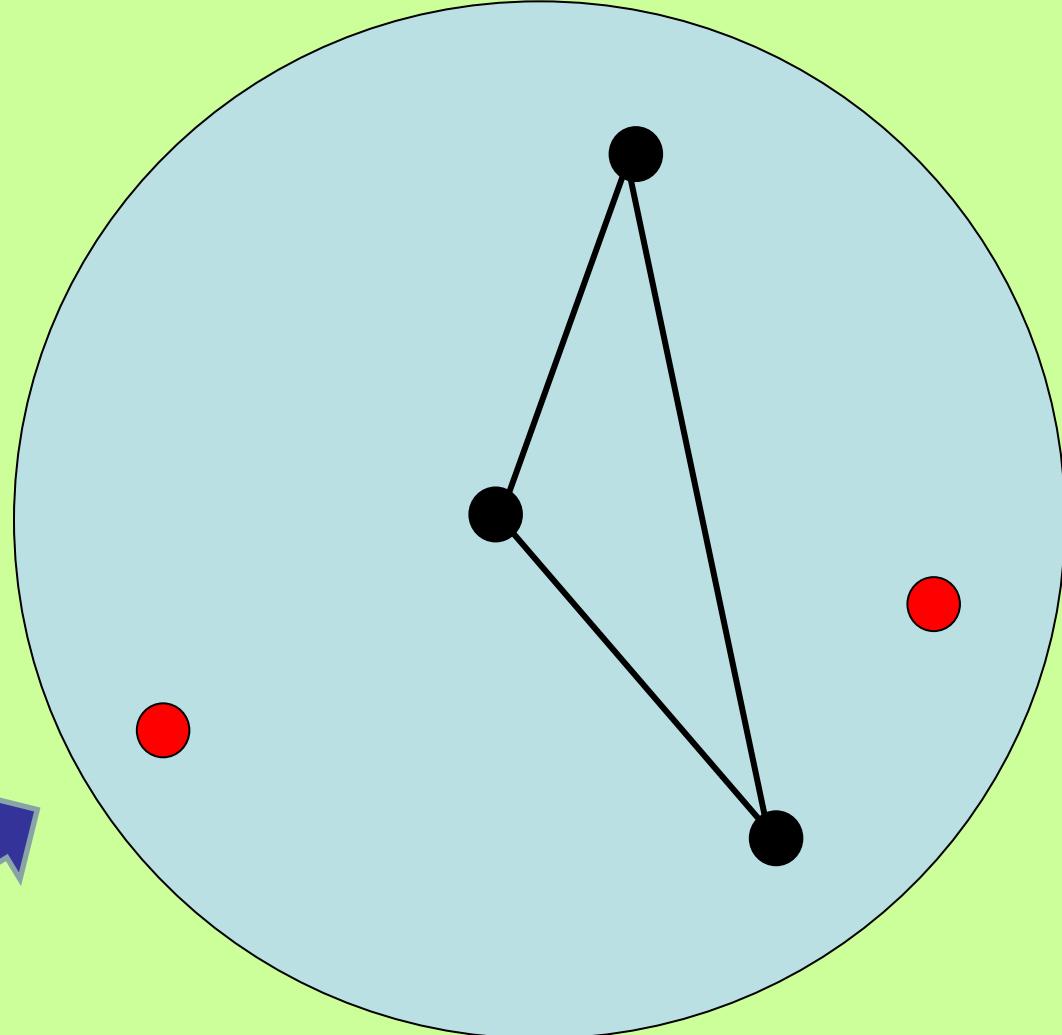
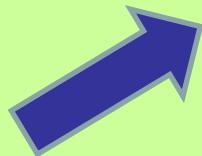
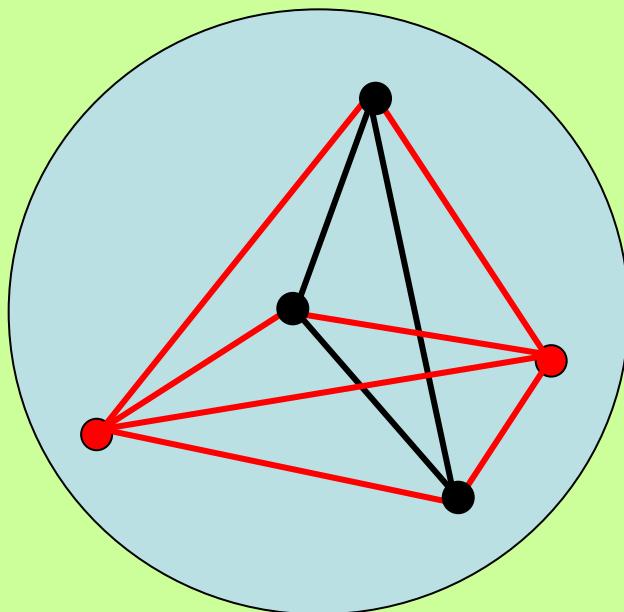
stesso fattore



le interazioni si affievoliscono
nel corso dell'espansione, fino
a che ...

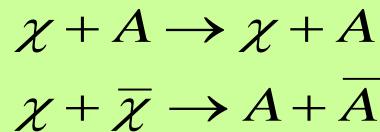


le interazioni si affievoliscono
nel corso dell'espansione, fino
a che alcune particelle si
disaccoppiano dal plasma



le particelle disaccoppiate non partecipano
piu' all'equilibrio del plasma, pur partecipando
all'espansione dell'Universo

Nel plasma primordiale l'equilibrio tra le diverse specie di particelle è mantenuto dalle mutue interazioni tra particelle, per esempio per la specie χ



★ il **tasso di interazione** (numero di eventi nell'unità di tempo) è dato da

$$\Gamma_{\text{int}} = n \sigma v$$

dove v è la velocità relativa della coppia di particelle e σ è la sezione d'urto

$$\sigma = \frac{\text{probabil. per unità di tempo}}{\text{flusso}}$$

★ l'Universo **si espande con un tasso** dato da H

una specie rimane in **equilibrio** finchè $\Gamma_{\text{int}} \geq H$

la specie si **disaccoppia** dal plasma e diventa una **particella fossile** quando

$$\Gamma_{\text{int}} < H$$

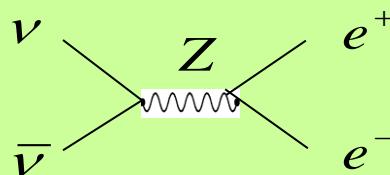
Disaccoppiamento dei neutrini

★ determinazione di $\Gamma_{\text{int}} = n \sigma v$

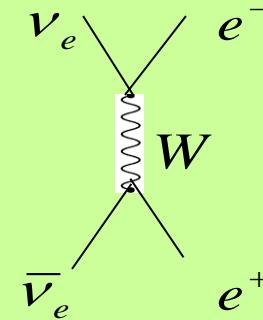
processi deboli

$$n \cong T^3$$

$$\langle \sigma \rangle \cong G_F^2 E_{\text{CM}}^2 \cong G_F^2 T^2$$



$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_{\text{int}} = n \sigma v \cong G_F^2 T^5 \\ \end{array} \right\}$$



$$\frac{f_W^2}{m_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$$

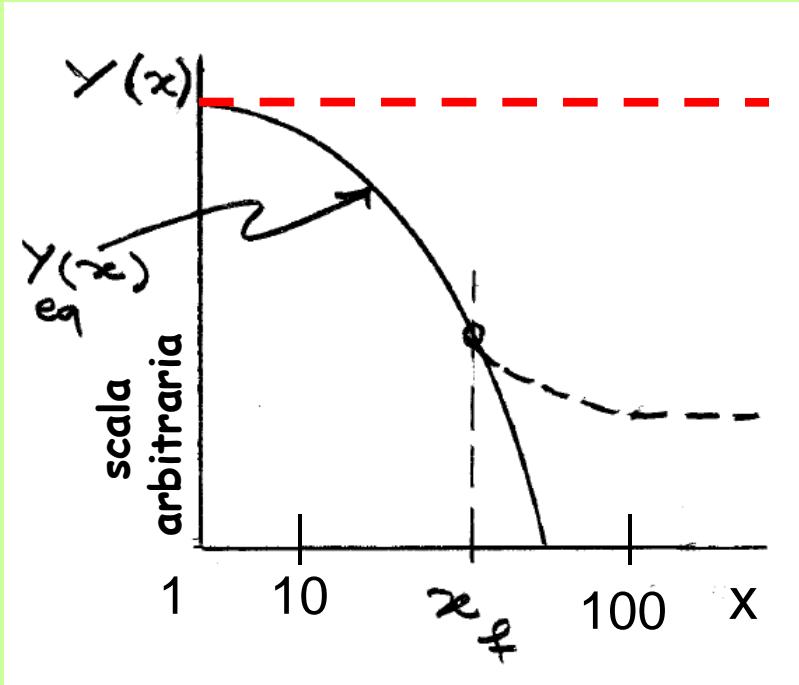
$$G_F \cong \frac{10^{-5}}{m_p^2}$$

★ costante di Hubble (con dominanza della radiazione)

$$H \cong \frac{T^2}{m_{\text{Plack}}} \quad (m_{\text{Planck}} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV})$$

$$\frac{\Gamma_{\text{int}}}{H} \cong \frac{G_F^2 T^5}{T^2 / m_{\text{Planck}}} = m_{\text{Planck}} G_F^2 T^3 \cong 10^{19} \text{ GeV} \times 10^{-10} \text{ GeV}^{-4} T^3 \cong \left(\frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^3$$

quindi i neutrini si disaccoppiano alla temperatura di circa 1 MeV



$Y(x)$ = numero di particelle nel volume comovente

$x \equiv \frac{m}{T}$, x_f valore di x al disaccoppiamento

se al disaccoppiamento $x < m/T$, la particella è relativistica (calda)

se al disaccoppiamento $x > m/T$, la particella è non-relativistica (fredda)

Abbondanze fossili per candidati caldi e freddi

abbondanza fossile dei neutrini

$$\Omega_\nu h^2 = \frac{\sum_i m_i}{93 \text{ eV}}$$

dallo studio delle oscillazioni dei neutrini solari e di quelli atmosferici
si ha $\sum_i m_i \leq 0.06 \text{ eV}$ e quindi

$$\Omega_\nu h^2 \leq 6.5 \times 10^{-4}$$

Per i candidati freddi dall'equazione di Boltzmann

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3Hn_\chi = - <\sigma_{ann} v> (n_\chi^2 - n_{\chi,eq}^2)$$

si ricava

$$\Omega_\chi h^2 \cong \frac{1}{g_*^{1/2}(x_f)} \frac{3.3 \times 10^{-38} \text{ cm}^2}{<\sigma v>_{int}}$$

dove $<\sigma v>_{int} \equiv \frac{1}{m} \int_0^{T_f} dT <\sigma v>$

Il valore di x_f si ricava numericamente

Un esempio di candidato freddo (esercizio)

$$m \cong 100 \text{ GeV}, \quad g = 2, \quad \langle \sigma v \rangle_{x_f} \cong 5 \times 10^{-37} \text{ cm}^2$$

Dalla condizione di disaccoppiamento

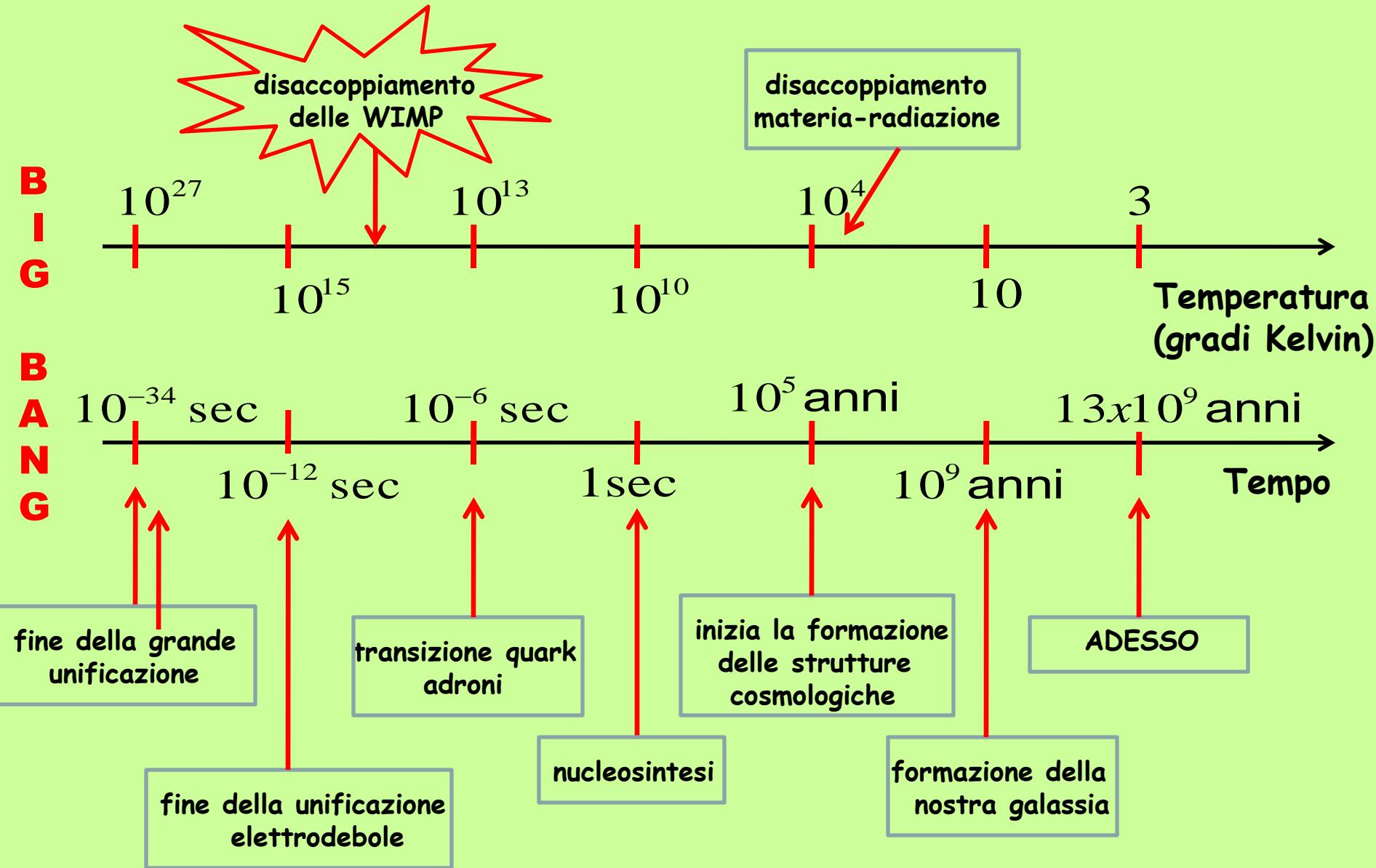
$$\left(\frac{\Gamma_{\text{int}}}{H} \right)_{x_f} \cong 1$$

si trova numericamente $x_f \cong 20$ e quindi

$$T_f = \frac{m}{x_f} \cong 5 \text{ GeV} \quad \Rightarrow \quad g_*(x_f = 20) \cong 80$$

da cui $\Omega_\chi h^2 \cong 0.15$

Quindi questo ipotetico candidato fornirebbe una grande abbondanza fossile



In un plasma che si raffredda le particelle piu' pesanti scompaiono progressivamente, generando particelle piu' leggere

All'epoca attuale le sole particelle del cosiddetto Modello Standard della fisica delle particelle presenti nell'Universo sono:

elettroni, protoni e neutroni (strutture nucleari e atomiche)

fotoni del fondo cosmico a microonde a 2.73 gradi Kelvin

neutrini di 3 tipi in un fondo cosmico a 1.96 gradi Kelvin
(fondo non ancora misurato)

Per avere materia oscura costituita da particelle, occorre che queste si siano disaccoppiate dal plasma primordiale; queste particelle devono essere stabili e neutre.

le particelle disaccoppiate dal plasma interagiscono tra di loro e con le altre particelle solo tramite la forza gravitazionale:

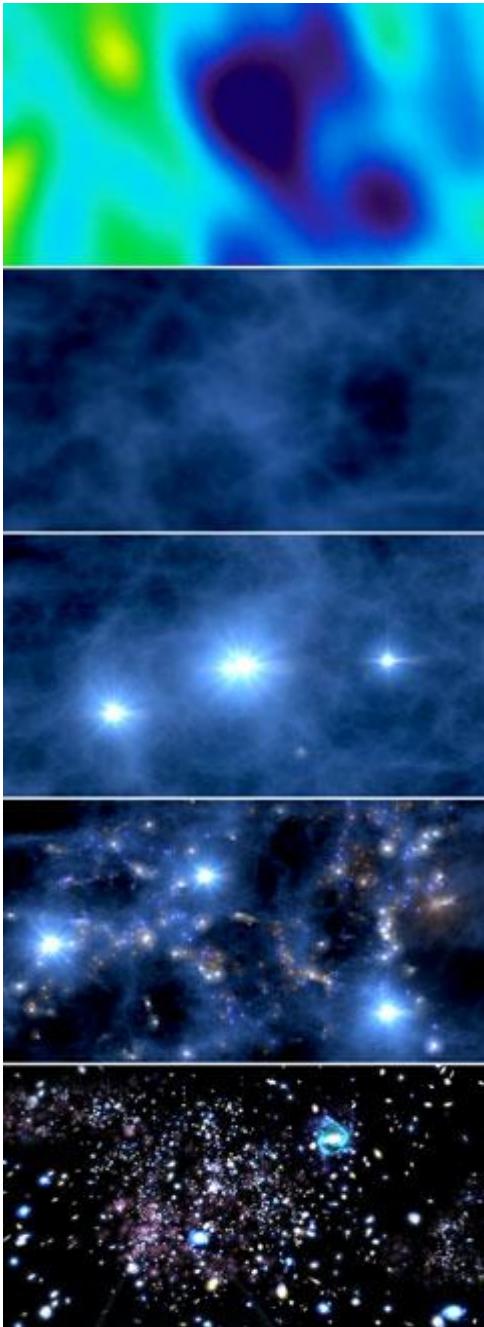
possono quindi costituire la materia oscura

2 categorie:

calde (con velocità prossima alla velocità della luce): neutrini

fredde (con velocità molto minori a quella della luce)

il ruolo delle particelle oscure fredde (cold dark matter) è cruciale per la formazione delle strutture cosmologiche (galassie, ammassi di galassie)



Fluttuazioni primordiali



Crescita delle fluttuazioni per effetto gravitazionale



Qui e' fondamentale la
presenza della materia
oscura

Formazione di strutture

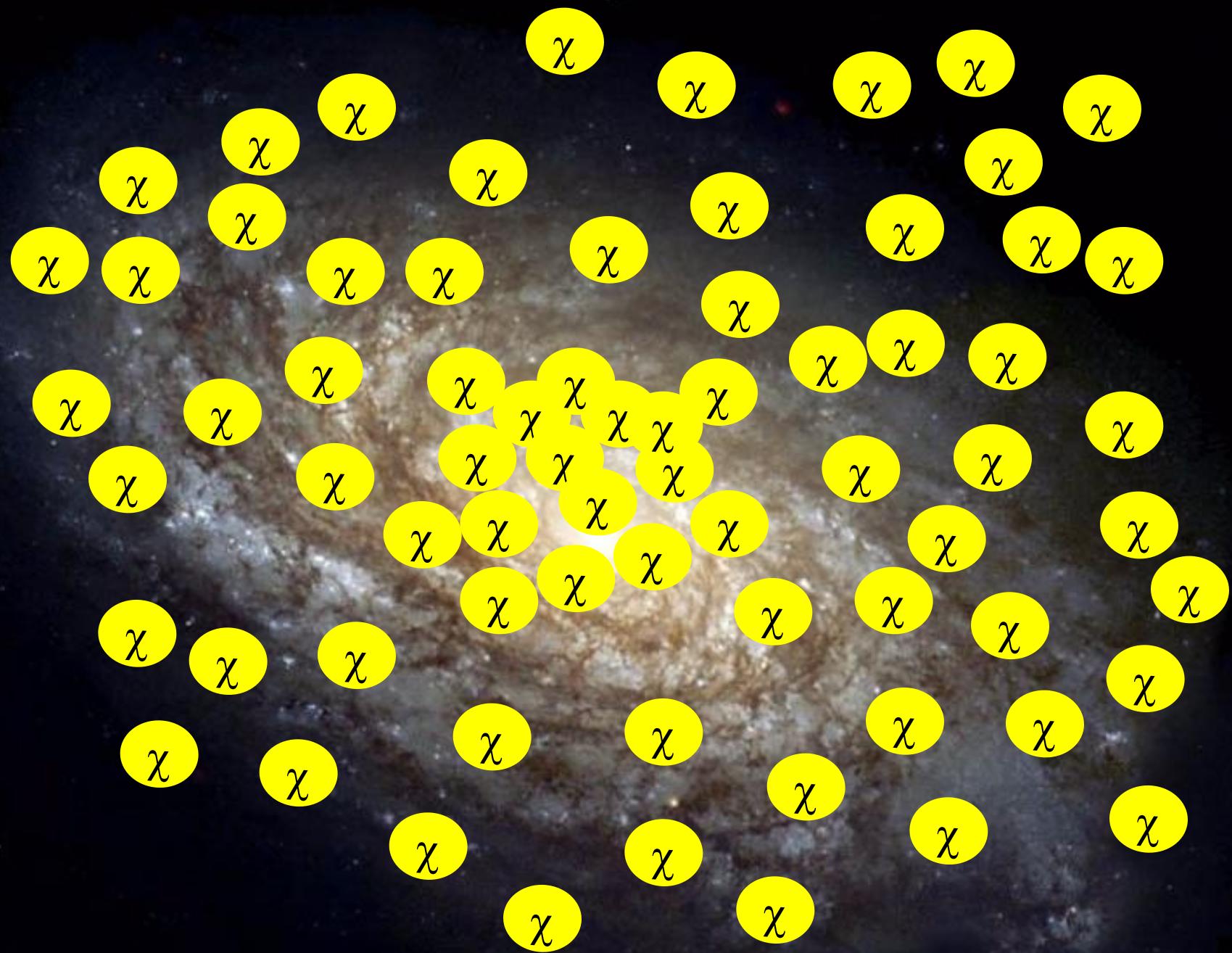
(galassie, ammassi di galassie)

- ★ per capire le proprieta' osservative della materia visibile
e anche
- ★ per spiegare la formazione delle strutture cosmologiche visibili

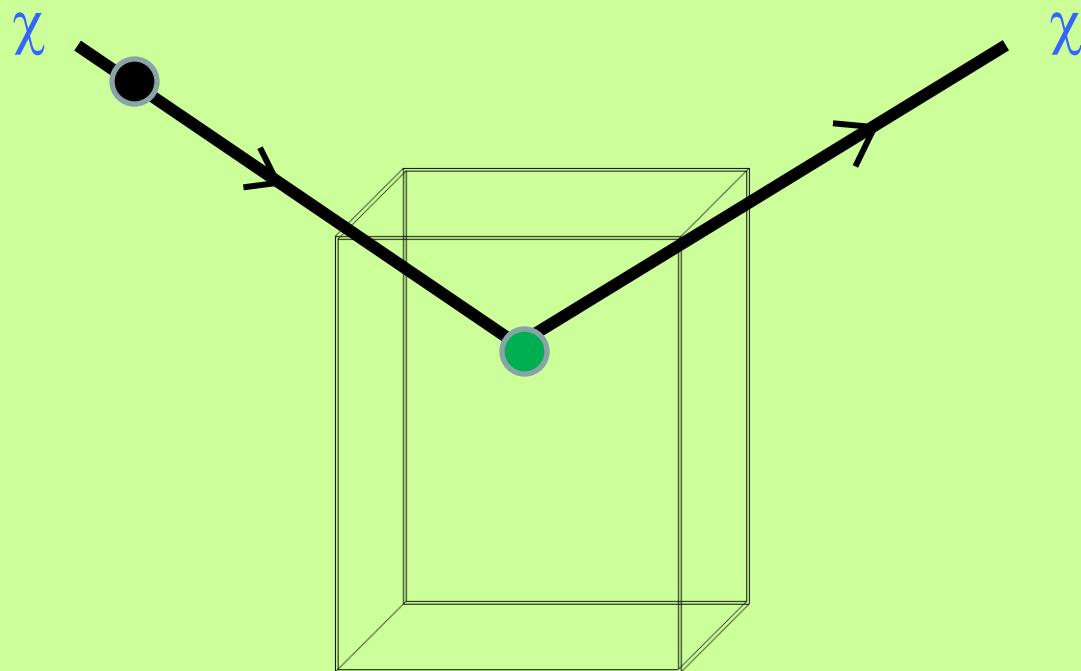
*occorre ipotizzare che la maggior parte della materia
nell'Universo sia oscura*

**Come misurare le particelle
oscure ?**



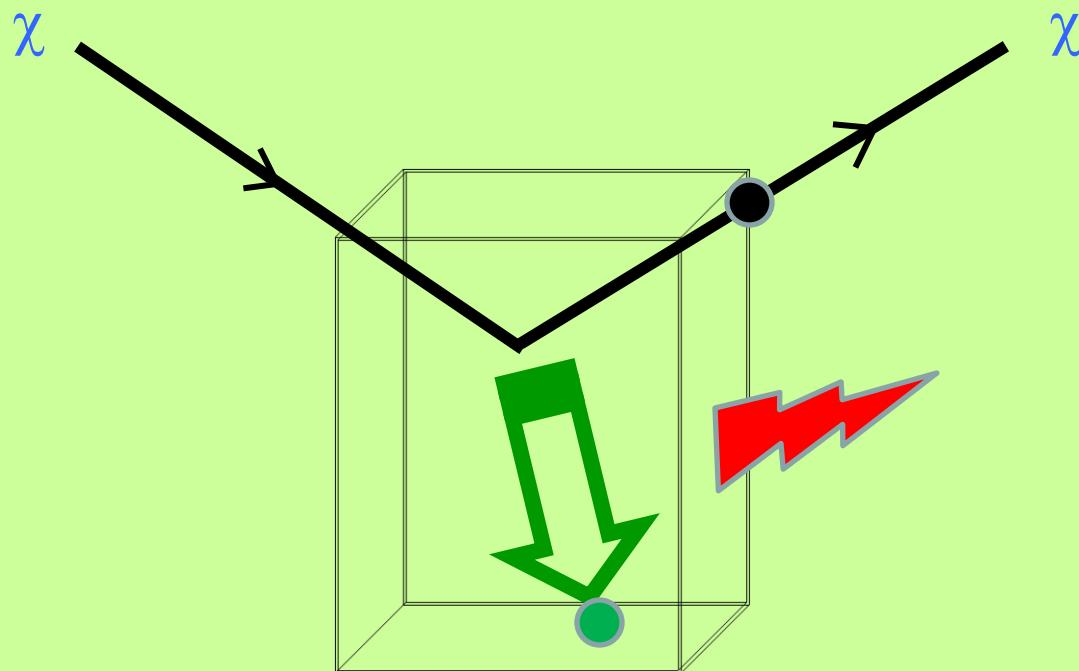


Misure dirette di WIMP



misura di rinculo nucleare

Misure dirette di WIMP

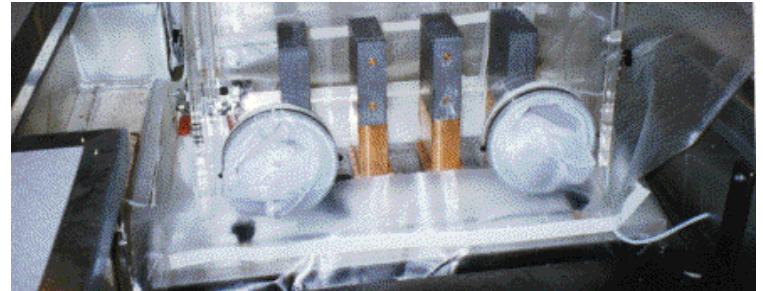


misura di rinculo nucleare

Ricerche in luoghi protetti dalla radiazione cosmica

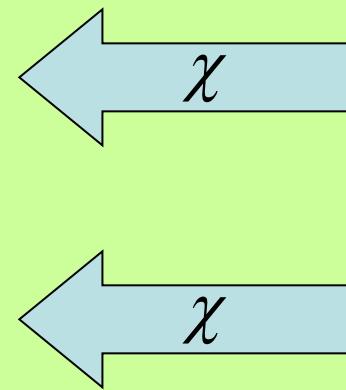
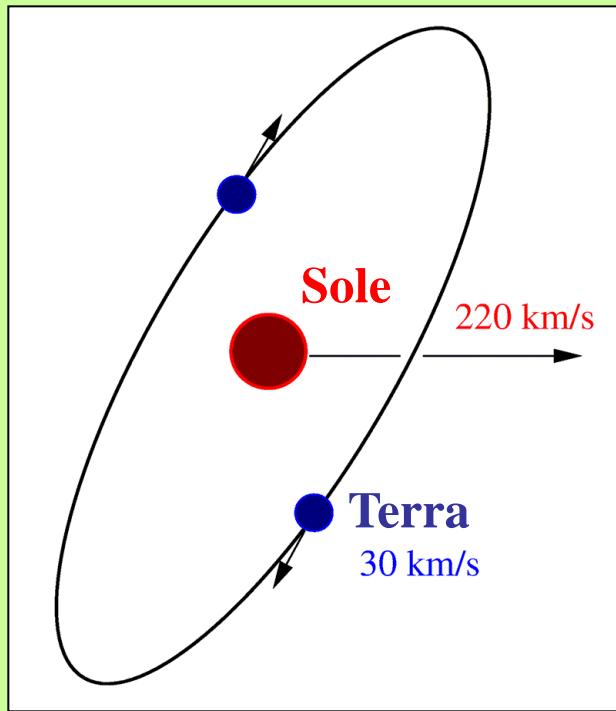


Esperimento DAMA



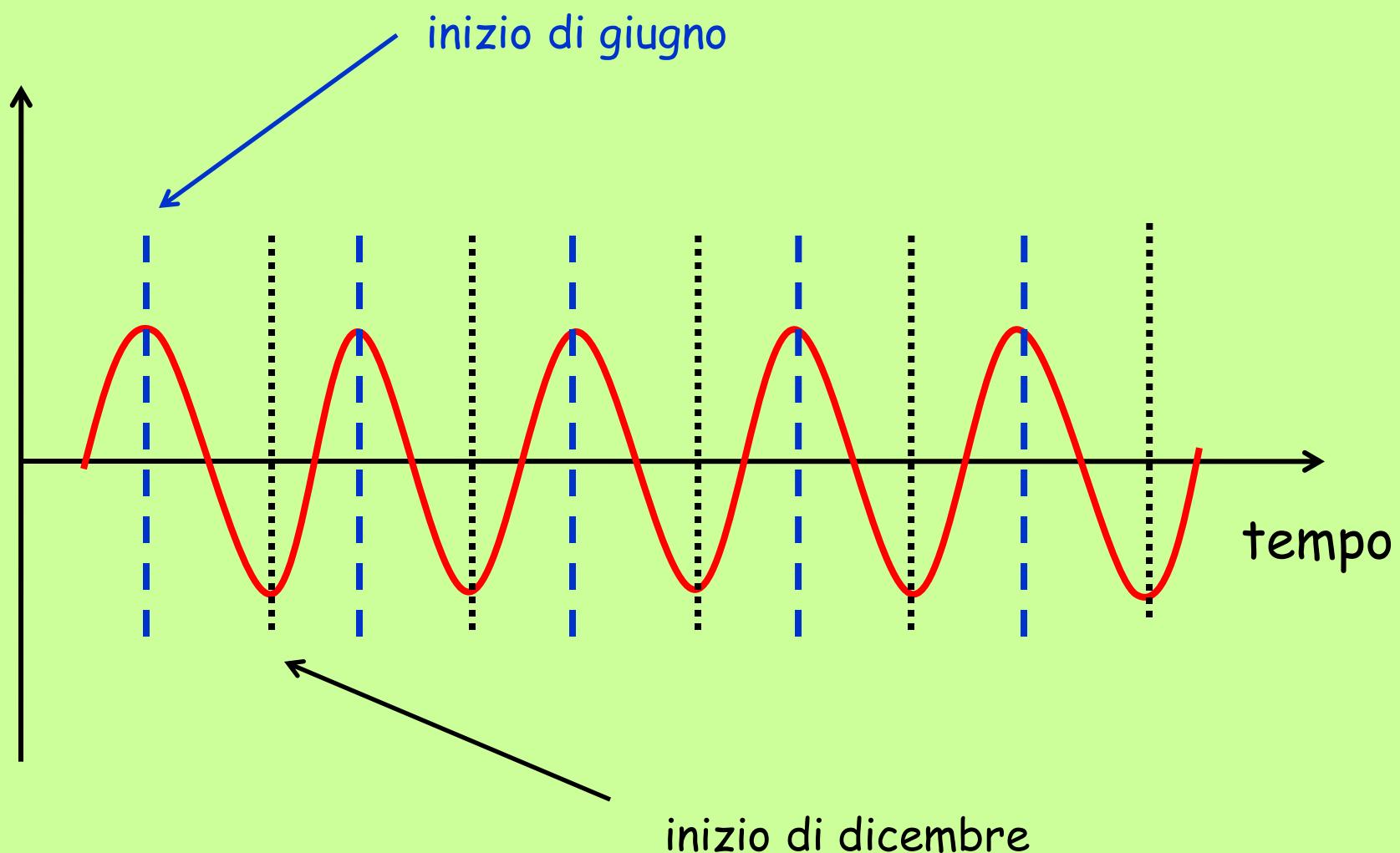
Laboratori Nazionali del Gran Sasso





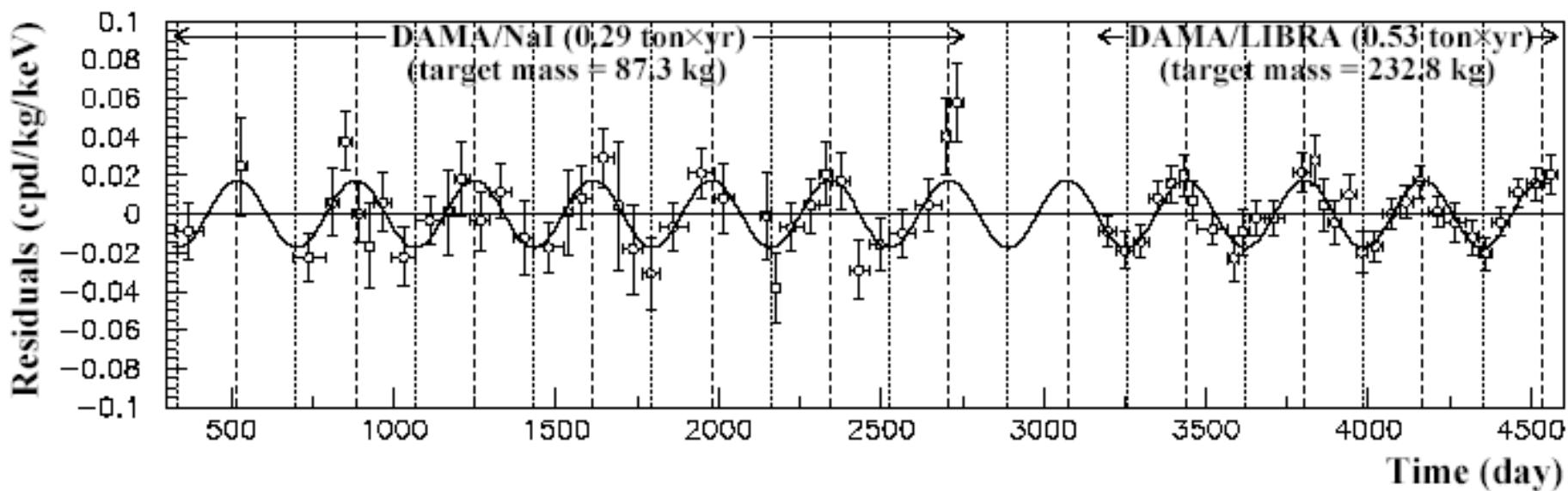
Moto del sistema solare
rispetto alle particelle
dell'alone oscuro

Variazione annuale del segnale



Esperimento DAMA presso il Laboratorio Nazionale del Gran Sasso dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare

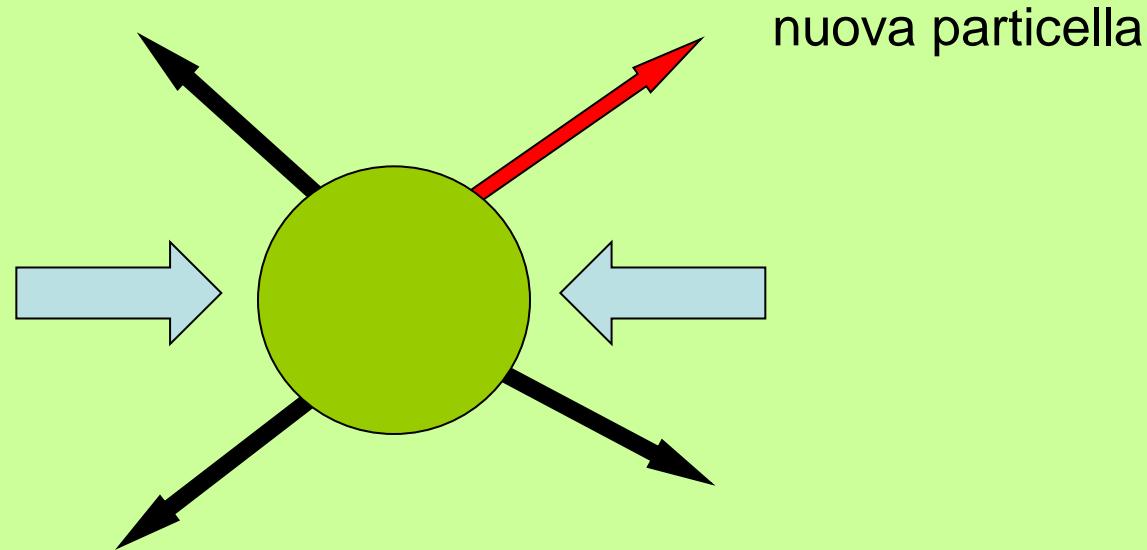
Osservata una variazione annuale del segnale su di un periodo complessivo di 11 anni



Gli altri esperimenti di misura diretta di materia oscura particellare forniscono solo limiti superiori sulla grandezza misurata

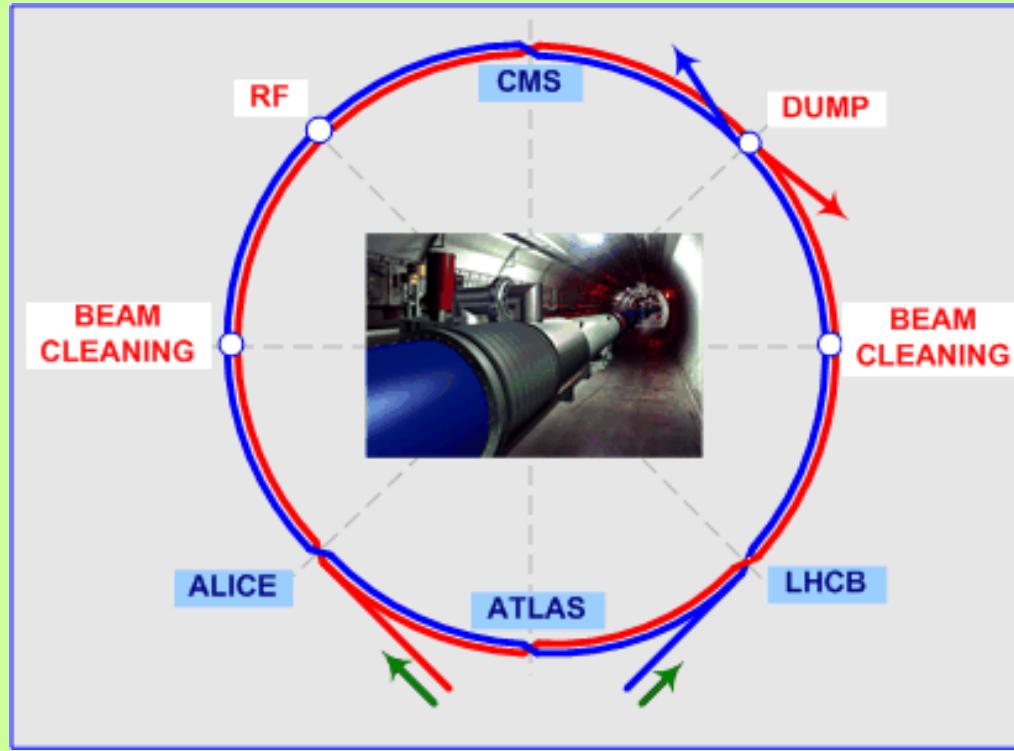
**Qual e' la natura delle particelle
oscure ?**

produzione di una nuova particella in laboratorio



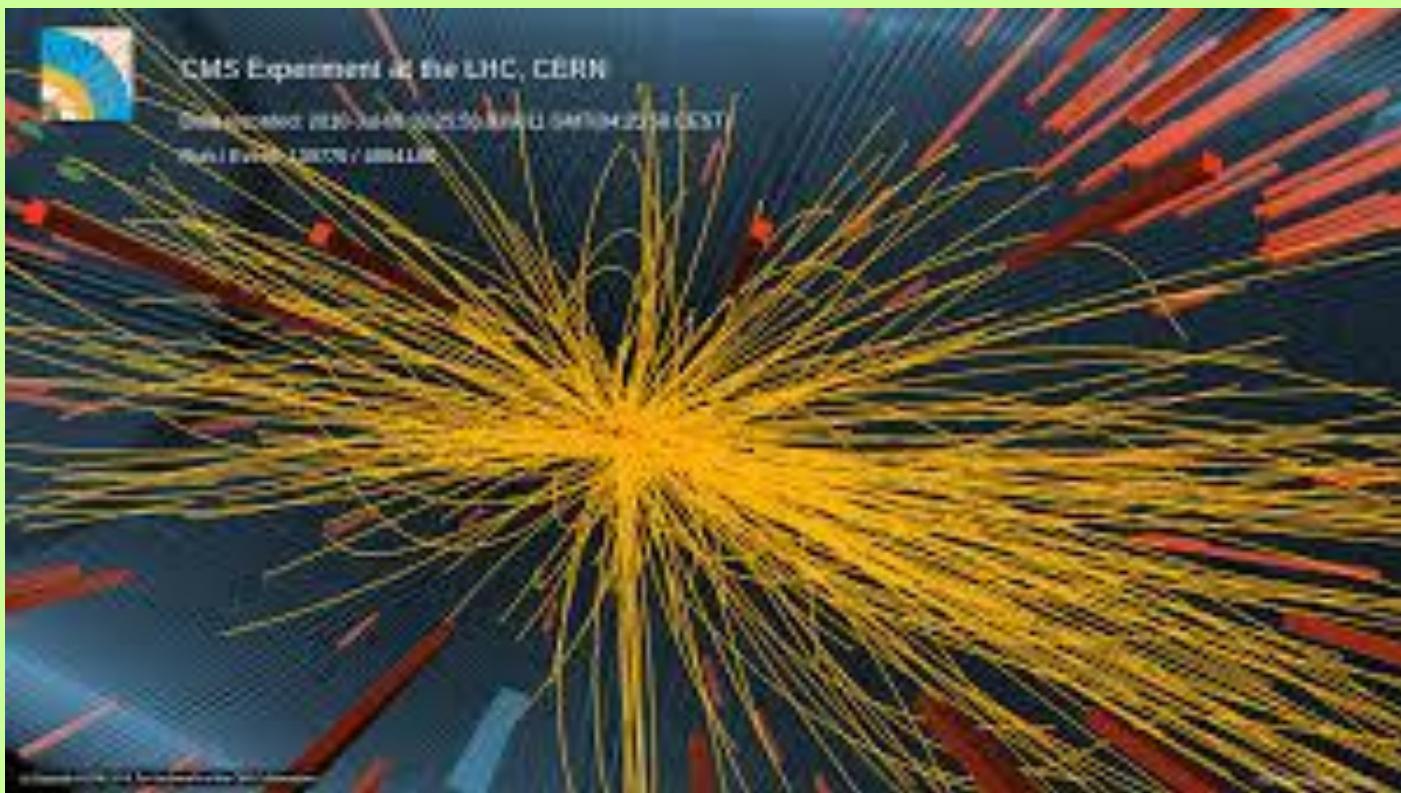
due particelle note vengono fatte collidere

Large Hadron Collider (CERN)



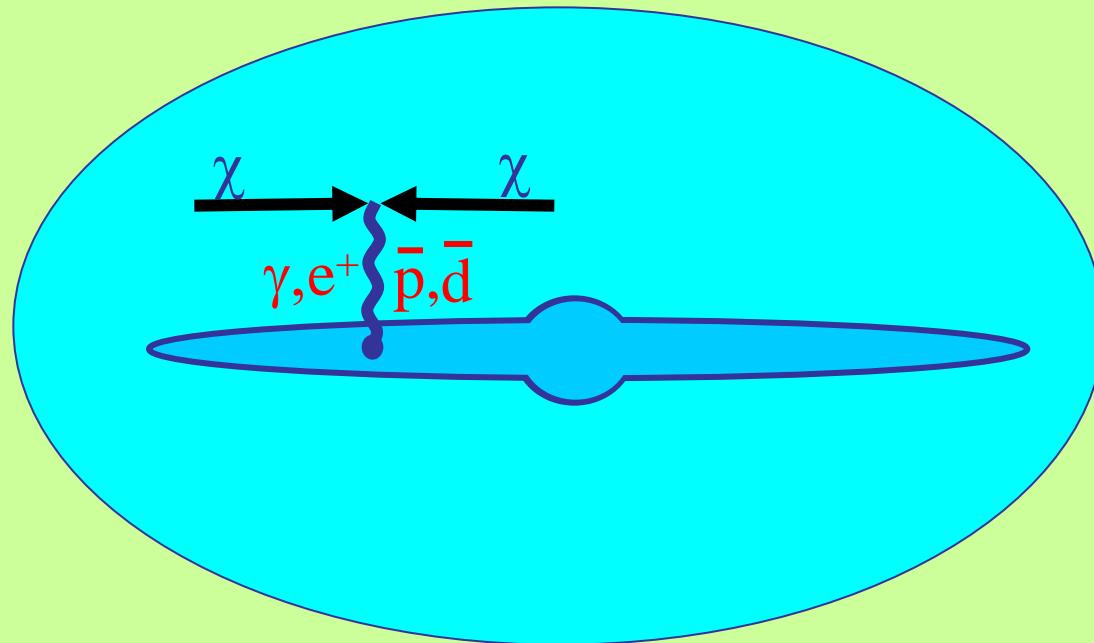
- ★ circonferenza di 27 km - tunnel sotterraneo a 50 - 175 metri di profondita'
- ★ 2 fasci di protoni circolanti in verso opposto per provocare collisioni
- ★ ogni protone ha un'energia 7.000 volte piu' grande della propria energia di riposo

una caccia al tesoro...



Misure indirette di WIMP

Un esempio – questo tema verrà trattato da Fiorenza Donato



Produzione di particelle rare nei raggi cosmici

Approfondimento 1

Il modello comunemente utilizzato per descrivere il nostro Universo (modello standard cosmologico) è quello di un **cosmo in espansione** descritto dalle **equazioni di relatività generale di Einstein** e assoggettato al **principio cosmologico** di isotropia e omogeneità a grandi scale.

● equazione di Einstein

$$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}$$

dove $S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda$



costante cosmologica



tensore di Ricci



tensore di Einstein



tensore energia-momento

● principio cosmologico di isotropia e omogeneità

metrica di Lemaitre-Friedmann-Robertson-Walker:

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right)$$

$R = R(t)$ parametro di scala cosmico $[R] = [l]$
 $k = +1, 0, -1$ parametro di curvatura

realizzazione di fluido perfetto per il tensore energia-momento:

$$T_{00} = \rho(t), T_{0i} = T_{i0} = 0, T_{ij} = \delta_{ij} p(t)$$

$\rho = \rho(t)$ densità
 $p = p(t)$ pressione

Approfondimento 1 (continua)

L'inserimento del termine di costante cosmologica $\Lambda g_{\mu\nu}$ nel primo membro dell'equazione di Einstein (A) **equivale ad aggiungere al tensore energia-impulso un contributo**

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} \equiv \rho_\Lambda g_{\mu\nu}$$

combinando questa espressione con

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = (\rho_\Lambda + p_\Lambda) u_\mu u_\nu - p g_{\mu\nu}$$

si ottiene $\rho_\Lambda = -p_\Lambda$ ossia $w_\Lambda = -1$

Quindi, complessivamente, all'evoluzione cosmica contribuiscono 3 componenti: radiazione con $w=1/3$, materia con $w=0$, energia del vuoto con $w=-1$.
Dall'equazione (D) si ottiene

$$\rho_m \propto \frac{1}{R^3}$$

materia

$$\rho_{rad} \propto \frac{1}{R^4}$$

radiazione

$$\rho_\Lambda \propto \text{costante}$$

energia del vuoto

Approfondimento 2

Proof of $S = \frac{p+P}{T} V$

$$dS = \frac{1}{T} d(PV) + \frac{P}{T} dV \quad (A)$$

Consider $S = S(V, T)$ with $P = P(T)$ and $p = p(T)$

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T} V dp + \frac{1}{T} p dV + \frac{P}{T} dV \\ &= \frac{V}{T} \frac{dp}{dT} dT + \frac{P+p}{T} dV \end{aligned}$$

We require that dS is an exact differential

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial V} dV$$

Then

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{dp}{dT}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{P+p}{T}$$

$$\text{From } \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} = \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T}$$

$$-\frac{1}{T^2} (P+p) + \frac{1}{T} \frac{dp}{dT} + \cancel{\frac{1}{T} \frac{dp}{dT}} = \frac{1}{T} \frac{dp}{dT}$$

Thus

$$dp = \frac{P+p}{T} dT \quad (B)$$

From (A), written as

$$dS = \frac{1}{T} d[(P+p)V] - \frac{V}{T} dp$$

and (B) one gets

$$dS = \frac{1}{T} d[(P+p)V] - \frac{P+p}{T^2} V dT = d\left[\frac{(P+p)V}{T} + \text{const}\right]$$

Thus, up to an additional constant,

$$S = \frac{P+p}{T} V$$

Alcuni testi su cui approfondire i principali argomenti trattati:

Carlo Giunti and Chung W. Kim: *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*, Oxford University Press (2007); **il cap.16** descrive in modo succinto il modello cosmologico standard e la termodinamica dell'Universo primordiale

Edward W. Kolb and Michael S. Turner: *The Early Universe*, Addison-Wesley Publishing Company (1990), **cap. 1-5**

Steven Weinberg: *Cosmology*, Oxford University Press (2008); **cap. 1-3**